

Übungen im Kurs Statistik, WS 2026/2027

Miroslav Bacak

Übung II am 27. und 30.10.2026



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Medizinische Fakultät



Zentrum
für Klinische Studien
Leipzig

Agenda

- 1 Quantile bei stetigen Verteilungen
- 2 Konfidenzintervalle
- 3 Effektschätzung mit Cohens d
- 4 Testatfragen zur Vorlesung II

1 Quantile bei stetigen Verteilungen

2 Konfidenzintervalle

3 Effektschätzung mit Cohens d

4 Testatfragen zur Vorlesung II

Quantile bei stetigen Verteilungen

Aufgabe 1: Skizziere die Dichte der Gleichverteilung mit $a = 0$ und $b = 10$. (TF 11)

- Wie groß ist die Gesamtfläche unter der Kurve?
- Wo liegen die Quantile Q_{17} , Q_{50} und $Q_{97,5}$? (TF 14)

Aufgabe 2: Skizziere die Dichte der Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

- Wie groß ist die Gesamtfläche unter der Kurve?
- Wo kann man die Wahrscheinlichkeiten $\text{Prob}\{x \leq 0\}$, $\text{Prob}\{0 < x \leq 1\}$ und $\text{Prob}\{x > 1\}$ ablesen? (TF 13)
- Wo liegt das Quantil Q_{50} und warum?
- Wo liegen die Quantile $Q_{97,5}$ und $Q_{2,5}$? (Wertetafel) Warum kennt man auch das zweite, wenn das erste bekannt ist? Wo liegen Q_{95} und Q_5 ?

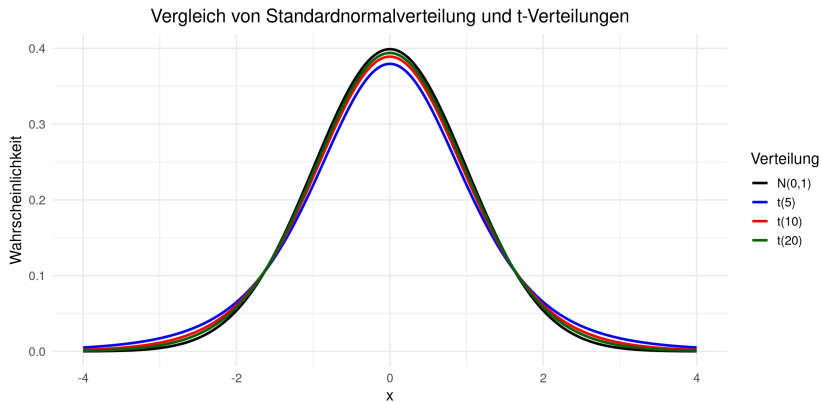
Aufgabe 3: Skizziere die Dichte einer t -Verteilung mit $df = 100$.

- Wie unterscheidet sich die Kurve von der Standardnormalverteilung?
- Wo liegen (näherungsweise) die Quantile $Q_{2,5}$, Q_5 , Q_{95} und $Q_{97,5}$?

Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767

t -Verteilung



1 Quantile bei stetigen Verteilungen

2 Konfidenzintervalle

3 Effektschätzung mit Cohens d

4 Testatfragen zur Vorlesung II

Konfidenzintervalle (1)

Das 95%-KI für den Stichproben-Mittelwert: (TF 16)

$$\left[\hat{\mu} - \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \sigma}{\sqrt{N}}, \hat{\mu} + \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

Aufgabe 4: Grundgesamtheit mit $\mu = 18,1$ und $\sigma = 2,05$.

Daraus: Stichprobe $\mathcal{S}_1$ mit $N = 50$, $\hat{\mu}_1 = 17,7$ und $\hat{\sigma}_1 = 2,15$.

- Bestimme das 95%-KI $\mathcal{I}_{95}$ für $\hat{\mu}_1$. (Taschenrechner)
- Was würde sich ändern, wenn σ nicht bekannt wäre?

Aufgabe 5: Neue Stichprobe: $\mathcal{S}_2$ mit $N = 50$, aber $\hat{\mu}_2 = 18,33$ und $\hat{\sigma}_2 = 2,12$.

- Bestimme das 95%-KI $\mathcal{J}_{95}$ für $\hat{\mu}_2$. (Taschenrechner)
- Warum sind die beiden KI $\mathcal{I}_{95}$ und $\mathcal{J}_{95}$ gleich lang?
- Was würde sich ändern, wenn σ nicht bekannt wäre?
- Wie lautet $\mathcal{J}_{90}$ und warum liegt es innerhalb von $\mathcal{J}_{95}$?

Das 95%-KI für den Stichproben-Mittelwert:

$$\left[\hat{\mu} - \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{N}}, \hat{\mu} + \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \right]$$

Aufgabe 6: Wenn man die Breite des 95%-KIs für $\hat{\mu}$ halbieren will, muss man...

- den Stichprobenumfang N wie verändern?
- eine neue Stichprobe mit welcher empirischen Standardabweichung $\hat{\sigma}$ benutzen?
- die Prozentzahl p (und die zugehörigen Quantile $Q_p(\mathcal{N})$) wie verändern? (Achtung: nichtlineare Abhängigkeit!)

Konfidenzintervalle (2)

Zu Aufgabe 6: Erzeuge ein KI mit der halben Breite. Es lautet:

$$\left[\hat{\mu} - \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \hat{\sigma}}{2\sqrt{N}}, \hat{\mu} + \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \hat{\sigma}}{2\sqrt{N}} \right]$$

Neuer Stichprobenumfang:

$$\left[\hat{\mu} - \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{4N}}, \hat{\mu} + \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{4N}} \right],$$

also $4N$. Neue empirische Standardabweichung:

$$\left[\hat{\mu} - \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot (\hat{\sigma}/2)}{\sqrt{N}}, \hat{\mu} + \frac{Q_{97,5}(\mathcal{N}) \cdot (\hat{\sigma}/2)}{\sqrt{N}} \right]$$

also $\hat{\sigma}/2$. Neues Quantil:

$$\left[\hat{\mu} - \frac{(Q_{97,5}(\mathcal{N})/2) \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{N}}, \hat{\mu} + \frac{(Q_{97,5}(\mathcal{N})/2) \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \right]$$

also $Q_p(\mathcal{N}) = 1, 96/2 = 0, 98$. In Wertetabelle ablesen $p = 0, 8365$.

Interpretation (“in the long run”): Aus einer Gesamtpopulation werden immer wieder unabhängige Stichproben von gleichem Umfang gezogen. (TF 17)

Aufgabe 7: Wieviele KI überdecken den wahren Mittelwert, ...

- wenn man 100 Stichproben zieht und jedesmal das 95%-KI bildet?
- wenn man 240 Stichproben zieht und jedesmal das 95%-KI bildet?
- wenn man 310 Stichproben zieht und jedesmal das 90%-KI bildet?
- wenn man 500 Stichproben zieht und jedesmal das 99%-KI bildet?
- Warum muss es jedesmal “ungefähr” heißen?

1 Quantile bei stetigen Verteilungen

2 Konfidenzintervalle

3 Effektschätzung mit Cohens d

4 Testatfragen zur Vorlesung II

Effektschätzung mit Cohens d

Situation:

- Zwei (normalverteilte) Populationen $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$,
- daraus zwei Stichproben $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$: Umfänge N' , N'' ,
- Stichproben-Mittelwerte $\hat{\mu}'$, $\hat{\mu}''$,
- empirische Standardabweichungen $\hat{\sigma}'$, $\hat{\sigma}''$.

Cohens d wird geschätzt durch:

$$\hat{d} := \frac{\hat{\mu}' - \hat{\mu}''}{\hat{\sigma}_p},$$

mit gepoolter empirischer Standardabweichung $\hat{\sigma}_p$:

$$\hat{\sigma}_p := \sqrt{\frac{N' - 1}{N' - 1 + N'' - 1} (\hat{\sigma}')^2 + \frac{N'' - 1}{N' - 1 + N'' - 1} (\hat{\sigma}'')^2}.$$

Effektstärken nach Cohen:

- kein Effekt: $|\hat{d}| < 0,2$,
- klein: $0,2 \leq |\hat{d}| < 0,5$,
- moderat: $0,5 \leq |\hat{d}| < 0,8$,
- stark: $0,8 \leq |\hat{d}|$.

Aufgabe 8:

Der unausgeschlafene Tennisspieler (vgl. Vorlesung I, Beispiel 1.5).

- Gruppe A: $N' = 8$, $\hat{\mu}' = 15,75$ Treffer, $\hat{\sigma}' = 2,08$.
- Gruppe B: $N'' = 8$, $\hat{\mu}'' = 11,25$ Treffer, $\hat{\sigma}'' = 2,0$.

Berechne Cohens d .

Vorgehen:

- 1 Differenz der Stichproben-Mittelwerte bilden
- 2 Gepoolte Standardabweichung ausrechnen
- 3 Quotienten $\hat{d}$ bilden
- 4 Beobachtete Effektstärke interpretieren

Aufgabe 8:

Der unausgeschlafene Tennisspieler (vgl. Vorlesung I, Beispiel 1.5).

- Gruppe A: $N' = 8$, $\hat{\mu}' = 15,75$ Treffer, $\hat{\sigma}' = 2,08$.
- Gruppe B: $N'' = 8$, $\hat{\mu}'' = 11,25$ Treffer, $\hat{\sigma}'' = 2,0$.

Berechne Cohens d .

Vorgehen:

- 1 Differenz der Stichproben-Mittelwerte bilden: $\hat{\mu}' - \hat{\mu}'' = 4,5$.
- 2 Gepoolte Standardabweichung ausrechnen: $\hat{\sigma}_p = 2,0404$.
- 3 Quotienten $\hat{d}$ bilden: $\hat{d} = 2,2$.
- 4 Beobachtete Effektstärke interpretieren: $|\hat{d}| \geq 0,8 \rightarrow$ starker Effekt.

① Quantile bei stetigen Verteilungen

② Konfidenzintervalle

③ Effektschätzung mit Cohens d

④ Testatfragen zur Vorlesung II

Ausgewählte Testatfragen zu Vorlesung II

12. Skizziere die Dichten der drei Normalverteilungen, die jeweils den Mittelwert $\mu = 0$ und die Standardabweichungen $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = 1$ und $\sigma_3 = 2$ besitzen.
14. Die Verteilung einer metrischen Variable x wird durch die Dichtefunktion f beschrieben. Wie wird das 97,5%-Quantil $Q_{97,5}(f)$ erklärt (Skizze)?
15. Welcher Verteilung unterliegen die Stichproben-Mittelwerte $\hat{\mu}$ einer metrischen Variablen beim wiederholten Ziehen von gleichgroßen, unabhängigen Stichproben?
17. Für 500 unabhängige, gleichgroße Stichproben aus $\mathcal{P}$ wurde jeweils das 90%-KI für den Stichproben-Mittelwert der metrischen Variable x berechnet. Wieviele dieser Intervalle enthalten den wahren Mittelwert μ von x in $\mathcal{P}$?
18. Was versteht man unter einer zweifach verblindeten randomisierten Interventionsstudie?
19. Erkläre: primärer Endpunkt einer Studie.
20. Welche vier wichtigsten Grundsätze sind bei der Planung und Durchführung einer randomisierten Studie zu beachten?