
**Forschungsmethodik:
Interventions- und Evaluationsforschung
theoretisch begründen**

Kleiner mathematischer Vorkurs, WS 2026/2027

Dr. Marcus Wagner, IMISE

Vorkurs am 13.10. und 16.10.2026

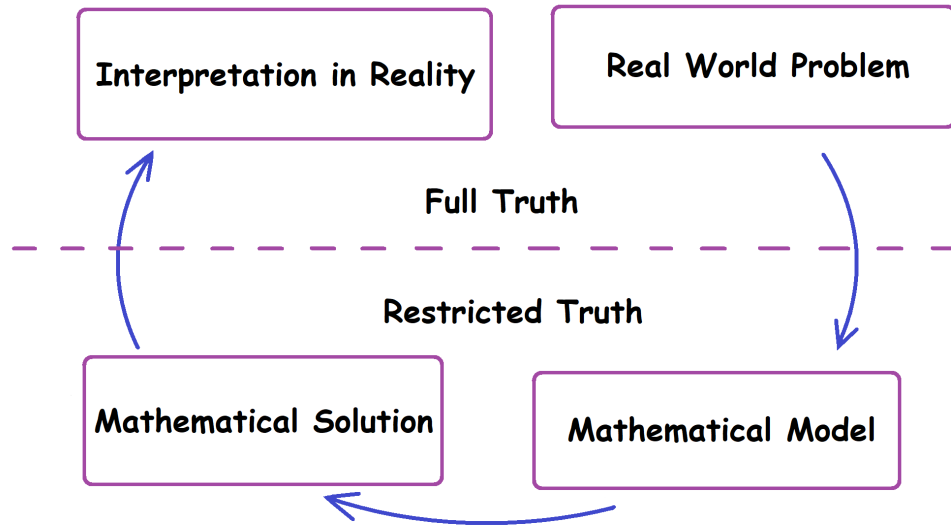
Übersicht

A) *Mathematik — warum?*

B) *Summen*

C) *Integrale bei Dichtefunktionen*

Mathematik — warum an dieser Stelle?



- Zitat aus Vorlesung I: “Grundkonzepte der Statistik beruhen auf mathematischen Modellen der Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Innerhalb dieser Modelle sind exakte Aussagen und Schlüsse möglich.”
- In unserem Kurs: Mathematik muß anwendungsfertig benutzt werden, begriffliche Details und Beweise bleiben im Hintergrund.

Rechnen mit Summenzeichen

• **Einfache Summen:** $\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \dots + a_{10}$; $\sum_{i=1}^N a_i = a_1 + \dots + a_N$

— *Fasse zusammen:* $p_1 + p_2 + \dots + p_7$; $\varepsilon(2) + \varepsilon(3) + \dots + \varepsilon(K)$

— *Schreibe die Summen aus:* $\sum_{n=1}^5 n^2$; $\sum_{k=4}^M b_k \cdot c_k$; $\sum_{i \geq 1, i \text{ ungerade}}^{10} y^i$

• **Aufteilen:** $\sum_{k=1}^{12} x_k = \sum_{k=1}^5 x_k + \sum_{k=6}^{12} x_k$

— *Teile die Summe bei $k = 10$:* $\sum_{k=0}^{20} k \cdot (k + 1)$

• **“Unbeschäftigter” Index:** *Schreibe die Summe aus:* $\sum_{j=1}^3 a_k \cdot b_j \cdot (j + 1)$

• **Doppelsummen:** $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 b_{i,j} = b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3} + b_{2,1} + b_{2,2} + b_{2,3}$

— *Fasse zusammen:* $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_1 + \dots + a_6 \cdot b_5 + a_7 \cdot b_5$

— *Schreibe die Summe aus:* $\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{m \cdot n}{2}$

Rechnen mit Summenzeichen (II)

• **Konstanten Faktor herausziehen:** $\sum_{i=1}^M 100 \cdot a_i = 100 \cdot \sum_{i=1}^M a_i$

• **Rechnen innerhalb der Summe:** $\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^N (a_k^2 + 2 \cdot a_k \cdot b_k + b_k^2)$

— *Forme um:* $\sum_{k=1}^N (a_k + 2 \cdot b_k)^2$

— *Forme um:* $\sum_{k=1}^N (a_k - b_k)^2$

— *Forme um:* $\sum_{k=1}^N p_j \cdot (a_k + b_k) \cdot (a_k - b_k)$

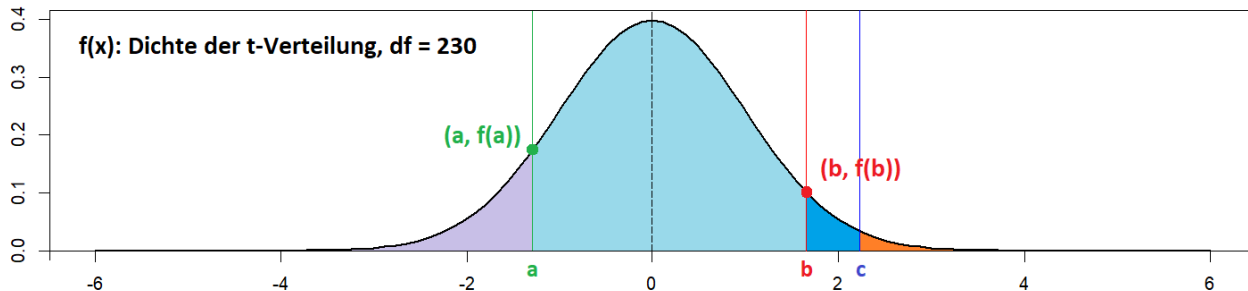
• **Summenformeln auswerten:** Eine Stichprobe $\mathcal{S}$ lautet

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10	20	10	30	40

— *Berechne hierzu:* $\hat{\mu} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_k$

— *Berechne hierzu:* $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{k=1}^N (x_k - \hat{\mu})^2}$

Integrale bei Dichtefunktionen



- **Was ist ein Integral?** $\int_a^b f(x) dx$ ist die Fläche unter dem Kurvenstück von $(a, f(a))$ bis $(b, f(b))$ (eine Art Summe mit "stetigem" Index)

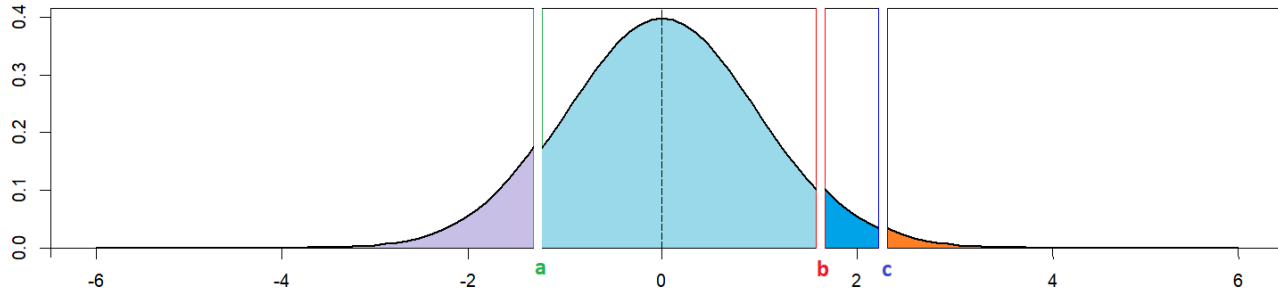
a, b — Integrationsgrenzen; $[a, b]$ — Integrationsbereich; $f(x)$ — Dichtefunktion als Integrand; x — Integrationsvariable (analog zum Summationsindex)

- **Interpretation** für Dichtefunktion $f(x)$: Fläche gleich Wahrscheinlichkeit

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Prob}\{a \leq x < b\}$$

- **Gesamtfläche** unter jeder Dichtefunktion $f(x)$: Eins

Integrale bei Dichtefunktionen: Bereiche



- **Unendliche Grenzen:** $\pm\infty$ *formal wie eine Zahl behandeln!*

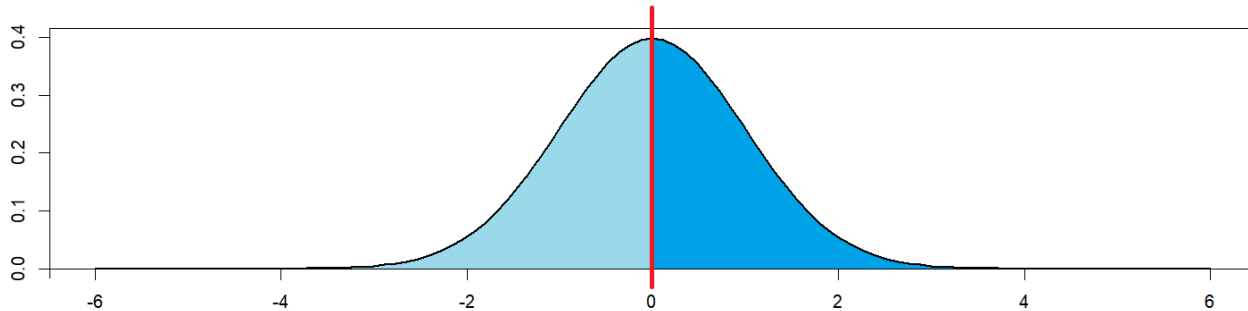
— Was bedeuten $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ und $\int_2^{+\infty} f(x) dx$? Berechne: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

- **Integrationsbereich zusammensetzen:** $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

— Wie groß ist $\text{Prob}\{0 \leq x < 2\} + \text{Prob}\{2 \leq x < 4\}$?

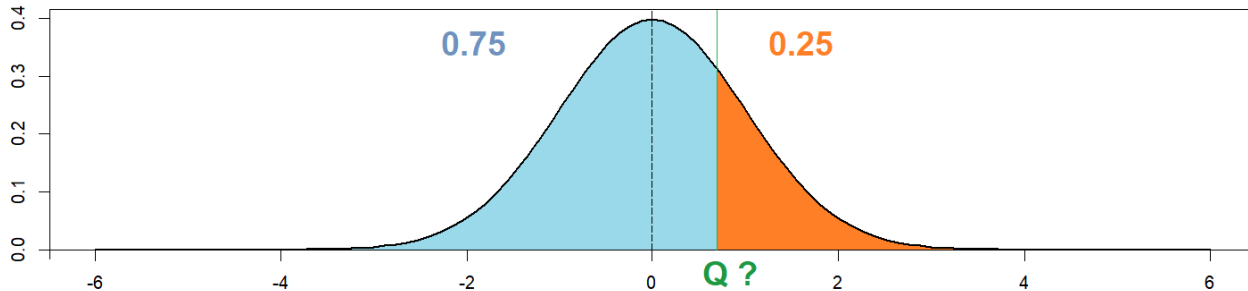
— Berechne: $1 - \int_{0.5}^{+\infty} f(x) dx$.

Integrale bei Dichtefunktionen: Symmetrie



- **Symmetrie** der Dichte $f(x)$ bezüglich der y -Achse: $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.
 - f sei symmetrisch. Wie groß sind $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ und $\int_0^{+\infty} f(x) dx$?
 - f sei symmetrisch. Warum stimmen $\int_{-3}^{-1} f(x) dx$ und $\int_1^3 f(x) dx$ überein?
 - f sei symmetrisch. Warum stimmen auch $\int_{-3}^1 f(x) dx$ und $\int_{-1}^3 f(x) dx$ überein?
-

Integrale bei Dichtefunktionen: “Quantile”



• **Vom Flächeninhalt zur Integrationsgrenze:** Gleichungen wie $\int_{-\infty}^Q f(x) dx = 0.75$ für unbekanntes Q werden normalerweise mit einer Wertetafel für das Integral gelöst.

• $f(x)$ sei die Dichte der Standard-Normalverteilung (symmetrische “Glockenkurve”).
Bekannt: $\int_{-\infty}^Q f(x) dx = 0.975$ hat die Lösung $Q = 1.96$.

— Löse die Gleichung $\int_{-\infty}^{Q'} f(x) dx = 0.025$ für unbekanntes Q' .

— Wieviel Prozent der Gesamtfläche beschreibt $\int_{Q'}^Q f(x) dx + \int_Q^{+\infty} f(x) dx$?