

**Bemerkungen zur Lipschitz-Stetigkeit
und Differenzierbarkeit der
unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion**

Marcus Wagner

Reihe Mathematik

M-02/2009

Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Fakultät 1, Mathematisches Institut

Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus

Bemerkungen zur Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit der unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion

Marcus Wagner

1. Einleitung.

a) Die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion.

Die vorliegende Arbeit steht im Zusammenhang mit der Untersuchung einer Klasse mehrdimensionaler Steuerungsprobleme, die im einfachsten Fall aus der Grundaufgabe der mehrdimensionalen Variationsrechnung

$$F(x) = \int_{\Omega} r(t, x(t), Jx(t)) dt \longrightarrow \inf!; \quad x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

durch die Hinzufügung von Restriktionen für die partiellen Ableitungen von x , beispielsweise

$$Jx(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m}(t) \end{pmatrix} \in K \subset \mathbb{R}^{nm} \quad (\forall) t \in \Omega, \quad (1.2)$$

entstehen. Derartige Aufgaben, auch Dieudonné-Rashevsky-Probleme genannt, ergeben sich bei der Untersuchung von Randwertaufgaben für nichtlineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung,⁰¹⁾ bei geometrischen Optimierungsaufgaben für konvexe Körper,⁰²⁾ in der Elastizitätstheorie (Torsionsprobleme)⁰³⁾ und in der Populationsdynamik (Aufgaben mit vorgegebener Altersstruktur).⁰⁴⁾ In jüngster Zeit hat sich herausgestellt, daß die Einbeziehung von Gradientenbeschränkungen auch in Aufgaben der mathematischen Bildverarbeitung sinnvoll ist.⁰⁵⁾ Alle genannten Aufgaben haben gemeinsam, daß sich die Restriktionen (1.2) auf einen *konvexen Körper* K mit $\mathbf{o} \in \text{int}(K)$ beziehen. Die in (1.1) auftretenden Integranden $r(t, \xi, v)$ sind in v möglicherweise nicht konvex⁰⁶⁾ und haben die Menge $\Omega \times \mathbb{R}^n \times K$ anstelle des Gesamtraumes als natürlichen Definitionsbereich.

Um in Dieudonné-Rashevsky-Problemen (1.1) – (1.2) mit $n \geq 2, m \geq 2$ die Existenz globaler Minimalstellen zu garantieren (und gleichzeitig die Anwendbarkeit direkter Verfahren zur numerischen Lösung der Aufgaben zu rechtfertigen), muß man bei der Relaxation — in Analogie zur Grundaufgabe der mehrdimensionalen Variationsrechnung — einen verallgemeinerten Konvexitätsbegriff zugrundelegen.⁰⁷⁾ Die vorangegangenen

⁰¹⁾ [DACOROGNA/MARCELLINI 97], [DACOROGNA/MARCELLINI 98] und [DACOROGNA/MARCELLINI 99].

⁰²⁾ [ANDREJEW/KLÖTZLER 84A] und [ANDREJEW/KLÖTZLER 84B], p. 149 f.

⁰³⁾ [FUNK 62], pp. 531 ff., [LUR'E 75], pp. 240 ff., [TING 69A], p. 531 f., [TING 69B] und [WAGNER 96], pp. 76 ff.

⁰⁴⁾ [BROKATE 85], [FEICHTINGER/TRAGLER/VELIOV 03].

⁰⁵⁾ [BRUNE/MAURER/WAGNER 08], [FRANEK/FRANEK/MAURER/WAGNER 08], [WAGNER 06A], pp. 108 ff., und [WAGNER 09B].

⁰⁶⁾ Als Beispiele seien polykonvexe Regularisierungsterme beim hyperelastischen image matching oder Perona-Malik-Regularisierungsterme bei der Bestimmung des optischen Flusses genannt (vergleiche [WAGNER 08B], pp. 28 ff., bzw. [AUBERT/KORNPORST 06], pp. 90 – 93, [KAWOHL 04] und [WAGNER 06A], p. 114).

⁰⁷⁾ [WAGNER 08A], p. 309, Theorem 1.3., und [WAGNER 08B], p. 4, Theorem 1.4.

Untersuchungen des Verfassers haben ergeben, daß die Behandlung von Aufgaben (1.1) – (1.2) mit Integranden $r(t, \xi, v)$ wie in der mehrdimensionalen Variationsrechnung⁰⁸⁾ auf die Untersuchung des Spezialfalls zurückgeführt werden kann, in dem der Integrand allein von v abhängt.⁰⁹⁾ Daher beschränken wir uns in der vorliegenden Arbeit auf die Behandlung von Integranden $f(v): K \rightarrow \mathbb{R}$, die mit $(+\infty)$ auf $\mathbb{R}^{nm} \setminus K$ fortgesetzt werden, und die *unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion* als passende semikonvexe Hüllfunktion. Genauer betrachten wir folgende Funktionenklasse:

Definition 1.1. (Funktionenklasse $\mathcal{F}_K$): $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ sei ein konvexer Körper mit $\mathbf{o} \in \text{int}(K)$. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ gehört zur Klasse $\mathcal{F}_K$, falls die Einschränkung $f|_K$ zu $C^0(K, \mathbb{R})$ gehört und $f|(\mathbb{R}^{nm} \setminus K) \equiv (+\infty)$ gilt.

Dabei wird der folgende Begriff der Quasikonvexität für Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ zugrundegelegt:

Definition 1.2. (quasikonvexe Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$):¹⁰⁾ Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ mit folgenden Eigenschaften heißt quasikonvex:

- 1) $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ ist eine nichtleere Borelsche Menge;
- 2) $f|_{\text{dom}(f)}$ ist Borel-meßbar und auf jeder beschränkten Teilmenge von $\text{dom}(f)$ nach unten beschränkt;
- 3) f erfüllt für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$ die Morreysche Integralungleichung:

$$f(v) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v + Jx(t)) dt \quad \forall x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n); \quad (1.3)$$

das ist gleichbedeutend mit

$$f(v) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v + Jx(t)) dt \mid x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}. \quad (1.4)$$

Dabei entsteht $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ der Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne.

Die zugehörige Hüllfunktion erklären wir wie folgt:

Definition 1.3. (unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}$):¹¹⁾ Zu einer nach unten beschränkten Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ definieren wir die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion

$$f^{(qc)}(v) = \sup \{ g(v) \mid g: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ quasikonvex und unterhalbstetig, } g(v) \leq f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{nm} \}. \quad (1.5)$$

Offensichtlich verallgemeinert Definition 1.3. die Bildung der “gewöhnlichen” quasikonvexen Hüllfunktion für eine Funktion f mit endlichen Werten, weil in diesem Fall alle quasikonvexen Funktionen $g \leq f$ von vornherein stetig sind.

b) Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f^{(qc)}$.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit der unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion $f^{(qc)}$ für Funktionen $f \in \mathcal{F}_K$ untersuchen und den entsprechenden Eigenschaften

⁰⁸⁾ Vergleiche [DACOROGNA 08], pp. 369 ff. und 416 ff.

⁰⁹⁾ [WAGNER 07] – [WAGNER 09A].

¹⁰⁾ [WAGNER 09A], p. 73, Definition 2.9., als Präzisierung von [BALL/MURAT 84], p. 228, Definition 2.1., im Fall $p = (+\infty)$.

¹¹⁾ [WAGNER 09A], p. 76, Definition 2.14., 2).

der konvexen Hüllfunktion f^c gegenüberstellen. Als separat konvexe Funktionen sind sowohl $f^{(qc)}$ als auch f^c auf $\text{int}(K)$ lokal Lipschitz-stetig (vergleiche Satz 2.2. und 2.9.) und damit λ^{nm} -fast überall auf $\text{int}(K)$ differenzierbar.¹²⁾ Für die konvexe Hüllfunktion können diese Aussagen wie folgt verschärft werden:

Satz 1.4.: *Gegeben seien ein konvexer Körper $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ mit $\mathfrak{o} \in \text{int}(K)$ und $\partial K = \text{ext}(K)$ sowie eine Funktion $f \in \mathcal{F}_K$.*

1) (**Globale Lipschitz-Stetigkeit von f^c**) *Wenn a) zu jedem Punkt $v_0 \in \partial K$ eine affin-lineare Funktion $\varphi(v, v_0) = \langle a(v_0), v - v_0 \rangle + b(v_0)$ mit $\varphi(v, v_0) \leq f(v) \forall v \in K$ existiert und b) $\sup_{v_0 \in \partial K} |a(v_0)| < (+\infty)$ gilt, so ist die konvexe Hüllfunktion f^c auf K global Lipschitz-stetig.*

2) (**Differenzierbarkeit von f^c auf $\text{int}(K)$**)¹³⁾ *Die Funktion $f \in \mathcal{F}_K$ sei durch*

$$f(v) = \begin{cases} \tilde{f}(v) & | \ v \in K; \\ (+\infty) & | \ v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus K \end{cases} \quad (1.6)$$

definiert, wobei $\tilde{f}: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, die mindestens auf K stetig differenzierbar ist. Dann ist f^c auf $\text{int}(K)$ stetig differenzierbar.

Für die quasikonvexe Hüllfunktion einer auf dem Gesamtraum definierten, nach unten beschränkten Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ haben BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN bewiesen, daß aus der Differenzierbarkeit von f zusammen mit gewissen Wachstumsbedingungen ebenfalls die Differenzierbarkeit von f^{qc} folgt.¹⁴⁾ In diesem Fall besitzen die partiellen Ableitungen von f^{qc} eine Darstellung

$$\frac{\partial f^{qc}}{\partial v_{ij}}(v_0) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(v) d\nu(v), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1.7)$$

mit einem “supporting measure” für f^{qc} in v_0 , d. h. einem positiven Maß ν , das sich als schwach*-Grenzwert einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\nu^N\}$ mit $f^{qc}(v_0) \leq \int_{\mathbb{R}^{nm}} f(v) d\nu^N(v) \leq f^{qc}(v_0) + 1/N$ und $(v_0)_{ij} = \int_{\mathbb{R}^{nm}} v_{ij} d\nu^N(v)$ ergibt.

Der Beweis vergleichbarer Aussagen für die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion zu $f \in \mathcal{F}_K$ stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. In der vorliegenden Untersuchung geben wir daher lediglich hinreichende Bedingungen für globale Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit an, die wie folgt ausgesprochen werden können:

Satz 1.5. (hinreichende Bedingung für globale Lipschitz-Stetigkeit von $f^{(qc)}$):¹⁵⁾ *Gegeben seien ein konvexer Körper K mit $\mathfrak{o} \in \text{int}(K)$ und $\partial K = \text{ext}(K)$ sowie eine Funktion $f \in \mathcal{F}_K$, die auf K global Lipschitz-stetig ist. Wenn a) zu jedem Punkt $v_0 \in \partial K$ eine affin-lineare Funktion $\varphi(v, v_0) = \langle a(v_0), v - v_0 \rangle + b(v_0)$ mit $\varphi(v, v_0) \leq f(v) \forall v \in K$ existiert und b) $\sup_{v_0 \in \partial K} |a(v_0)| < (+\infty)$ gilt, so ist $f^{(qc)}$ auf K global Lipschitz-stetig.*

¹²⁾ Das folgt aus dem Satz von Rademacher, siehe [EVANS/GARIEPY 92], p. 81, Theorem 2.

¹³⁾ [GRIEWANK/RABIER 90], p. 701, Corollary 3.1., wo stattdessen vorausgesetzt wurde, daß ∂K eine $(nm - 1)$ -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit bildet. Nach [BONNESEN/FENCHEL 74], p. 26, ist $\partial K = \text{ext}(K)$ dafür hinreichend.

¹⁴⁾ [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00], p. 334, Theorem A.

¹⁵⁾ Hiermit wird [WAGNER 06A], p. 76, Satz 5.6., korrigiert. In den Aussagen ebenda, pp. 97 ff., müssen die Prämissen entsprechend angepaßt werden.

Satz 1.6. (hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit von $f^{(qc)}$ in $v_0 \in \text{int}(K)$):¹⁶⁾ Die Funktion $f \in \mathcal{F}_K$ sei durch

$$f(v) = \begin{cases} \tilde{f}(v) & v \in K; \\ (+\infty) & v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus K \end{cases} \quad (1.8)$$

definiert, wobei $\tilde{f}: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf einer offenen Umgebung von K stetig differenzierbar ist. Zu einem Punkt $v_0 \in \text{int}(K)$ mögen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_0 \in S^{(qc)}(v_0)$, eine Folge $\{x^N\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und eine Zahl $0 < \mu < 1$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

- a) $f^{(qc)}(v_0) = \int_K f(v) d\nu_0(v)$,
- b) die konstante verallgemeinerte Steuerung $\nu = \{\nu_0\}$ wird durch die Folge $\{v_0 + Jx^N\}$ erzeugt,
- c) für fast alle $t \in \Omega$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $v_0 + Jx^N(t) \in \mu K$.

Dann ist $f^{(qc)}$ in v_0 differenzierbar, und für alle $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ gilt:

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{ij}}(v_0) = \int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{ij}}(v) d\nu_0(v). \quad (1.9)$$

Die Menge $S^{(qc)}(v_0) \subseteq (C^0(K, \mathbb{R}))^*$ wird in Definition 2.11. erklärt und enthält insbesondere alle “supporting measures” für $f^{(qc)}$ in v_0 (vergleiche Satz 2.12.).

Die Differenzierbarkeit von $f^{(qc)}$ kann außerdem in allen Punkten $v \in \text{int}(K)$ gesichert werden, wo f und $f^{(qc)}$ übereinstimmen, also insbesondere in den globalen Minimalstellen von f , die ins Innere von K fallen (Satz 3.2.). Schließlich zeigen wir anhand eines Beispiels, daß die partiellen Ableitungen von $f^{(qc)}$ auch im Fall ihres Vorhandenseins nicht notwendig in der Gestalt (1.7) dargestellt werden können:

Satz 1.7. (Gegenbeispiel zur Darstellung von $\nabla f^{(qc)}$ mit einem “supporting measure”): Es gibt einen konvexen Körper $K \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und eine Funktion $f \in \mathcal{F}_K$, so daß ein Punkt $v_0 \in \text{int}(K)$ mit folgenden Eigenschaften existiert: $f^{(qc)}$ ist in v_0 differenzierbar, aber für jedes Maß $\nu_0 \in S^{(qc)}(v_0)$ mit $f^{(qc)}(v_0) = \int_K f(v) d\nu_0(v)$ existiert mindestens ein Paar von Indizes (i, j) mit $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$ und

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{ij}}(v_0) \neq \int_K \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(v) d\nu_0(v). \quad (1.10)$$

Dasselbe Beispiel zeigt außerdem, daß man in den Sätzen 1.4., 1) und 1.5. nicht auf die Voraussetzung $\partial K = \text{ext}(K)$ verzichten kann (Lemma 3.5., 3)).

Die verwendeten Hilfsmittel (verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe, verallgemeinerte Steuerungen) und die bisher bekannten analytischen Eigenschaften von $f^{(qc)}$ werden im folgenden Kapitel 2 zusammengestellt. Kapitel 3 enthält die angekündigten Sätze und Beweise.

c) Zur Notation.

Sei $k \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann bezeichnen $C^k(\Omega, \mathbb{R}^r)$, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^r)$ und $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ die Räume der r -dimensionalen Vektorfunktionen, deren Komponenten k -mal stetig differenzierbar sind, in p -ter Potenz integrierbar sind bzw. zum Sobolevraum jener $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ -Funktionen gehören, die verallgemeinerte

¹⁶⁾ Hiermit wird [WAGNER 06A], p. 76, Satz 5.5., korrigiert. Auf den Fehler im Beweis dieses Satzes ebenda, p. 78 f., hat mich Prof. KIRCHHEIM (Düsseldorf) aufmerksam gemacht: Lemma 5.9. kann nicht benutzt werden, um (5.37) herzuleiten.

partielle Ableitungen bis zur k -ten Ordnung besitzen, welche ebenfalls im $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ liegen. Funktionen aus den Unterräumen $C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^r) \subset C^k(\Omega, \mathbb{R}^r)$ und $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^r) \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ haben überdies kompakte Träger; die Komponenten von $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ besitzen Lipschitz-stetige Repräsentanten¹⁷⁾ mit Nullrandwerten. Mit $\partial x / \partial t_j$ bezeichnen wir die klassische partielle Ableitung von x nach t_j . Im Gegensatz dazu wollen wir bei der Abkürzung Jx für die Jacobimatrix der Funktion x nicht zwischen klassischen und verallgemeinerten partiellen Ableitungen unterscheiden.

Mit $\text{int}(A)$, ∂A , $\text{cl}(A)$, $\text{co}(A)$ und $|A|$ bezeichnen wir das Innere, den Rand, den Abschluß, die konvexe Hülle bzw. das r -dimensionale Lebesguesche Maß einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^r$. Wir definieren $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ und erweitern die topologischen und Ordnungsstrukturen der Zahlengeraden in natürlicher Weise, so daß der unendlich ferne Punkt $(+\infty)$ als größtes Element hinzukommt.

In der gesamten Arbeit betrachten wir nur *eigentliche Funktionen* $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, deren effektiver Definitionsbereich $\text{dom}(f) = \{v \in \mathbb{R}^{nm} \mid f(v) < (+\infty)\}$ als nichtleer vorausgesetzt wird. Die Einschränkung einer Funktion f auf eine Teilmenge A ihres Definitionsbereiches wird mit $f|_A$ bezeichnet. Gehört eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zur oben definierten Funktionenklasse $\mathcal{F}_K$, so ist ihre Einschränkung $f|_K$ beschränkt und (sogar gleichmäßig) stetig. $\mathcal{F}_K$ ist daher isomorph und isometrisch zum Banachraum $C^0(K, \mathbb{R})$.

Unter einem konvexen Körper $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ verstehen wir eine konvexe, kompakte Menge mit nichtleerem Inneren.¹⁸⁾ Ein Punkt $v \in K$ heißt Extremalpunkt von K , falls aus $v = \lambda' v' + \lambda'' v''$, $\lambda', \lambda'' > 0$, $\lambda' + \lambda'' = 1$, $v', v'' \in K$ stets $v' = v'' = v$ folgt. Die Menge aller Extremalpunkte von K wird mit $\text{ext}(K)$ bezeichnet. Jeder konvexe Körper muß mindestens einen Extremalpunkt besitzen.

Wir verwenden drei vom üblichen Gebrauch abweichende Bezeichnungen: “ $\{x^N\}$, A ” bezeichnet eine Folge $\{x^N\}$ mit Gliedern $x^N \in A$. Für $A \subseteq \mathbb{R}^r$ ist die Abkürzung “ $(\forall) t \in A$ ” zu lesen als: “für fast alle $t \in A$ ” bzw. “für alle $t \in A$ mit Ausnahme einer r -dimensionalen Lebesgueschen Nullmenge”. Schließlich bezeichnet das Symbol $\mathfrak{o}$ kontextabhängig das Nullelement bzw. die Nullfunktion des zugrundeliegenden Raumes.

2. Hilfsmittel zur Untersuchung von $f^{(qc)}$.

a) Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe.

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung der verallgemeinerten Konvexitätsbegriffe, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.

Definition 2.1.: 1) (**polykonvexe Funktion**) Wir fassen $v \in \mathbb{R}^{nm}$ als (n, m) -Matrix auf und bezeichnen mit $T(v)$ den Vektor aller Unterdeterminanten von v . $T(v)$ habe $\tau(n, m)$ Komponenten. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt polykonvex, wenn mindestens eine konvexe Funktion $g: \mathbb{R}^{\tau(n, m)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f(v) = g(T(v)) \forall v \in \mathbb{R}^{nm}$ existiert.

2) (**Rang-1-konvexe Funktion**) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt Rang-1-konvex, wenn sie die Jensensche Ungleichung entlang aller Rang-1-Richtungen erfüllt: Für alle (als (n, m) -Matrizen aufgefaßten) $v', v'' \in \mathbb{R}^{nm}$ gilt

$$\text{Rg}(v' - v'') \leq 1 \implies f(\lambda' v' + \lambda'' v'') \leq \lambda' f(v') + \lambda'' f(v'') \quad \forall \lambda', \lambda'' \geq 0, \lambda' + \lambda'' = 1. \quad (2.1)$$

3) (**separat konvexe Funktion**) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt separat konvex, wenn sie jeweils als Funktion einer einzelnen Variablen v_{ij} konvex ist, während alle anderen festgehalten werden.

¹⁷⁾ [EVANS/GARIEPY 92], p. 131, Theorem 5.

¹⁸⁾ Wir folgen [BRØNDSTED 83] und [SCHNEIDER 93].

Für Funktionen $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt: f konvex $\implies f$ polykonvex $\implies f$ Rang-1-konvex $\implies f$ separat konvex.¹⁹⁾ Nach dem folgenden Satz sind bereits separat konvexe Funktionen lokal Lipschitz-stetig.

Satz 2.2. (Lipschitz-Stetigkeit separat konvexer Funktionen):²⁰⁾ *Jede separat konvexe Funktion $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist auf $\text{int}(\text{dom}(f))$ lokal Lipschitz-stetig.*

Aus [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00] entnehmen wir folgenden Differenzierbarkeitssatz:

Satz 2.3. (Differenzierbarkeit separat konvexer Funktionen):²¹⁾ *Sei $K(v_0, \delta) \subset \mathbb{R}^{nm}$. Für zwei Funktionen $\varphi', \varphi'': K(v_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $\varphi'(v_0) = \varphi''(v_0)$ und $\varphi'(v) \leq \varphi''(v)$ für alle $v \in K(v_0, \delta)$. Weiter sei φ' separat konvex, und für φ'' existiere ein $a \in \mathbb{R}^{nm}$ mit*

$$\limsup_{w \rightarrow 0} \frac{1}{|w|} \left(\varphi''(v_0 + w) - \varphi''(v_0) - a^T w \right) \leq 0. \quad (2.2)$$

Dann sind φ' und φ'' in v_0 differenzierbar, und es gilt $\nabla \varphi'(v_0) = \nabla \varphi''(v_0)$.

b) Verallgemeinerte Steuerungen.

Eine maßwertige Abbildung $\mu: \Omega \rightarrow \text{rca}^{pr}(\mathbb{K})$ gemäß $t \mapsto \mu_t$ heißt *verallgemeinerte Steuerung* (“Youngsches Maß”), wenn für jedes stetige $g \in C^0(\mathbb{K}, \mathbb{R})$ die Funktion $h_g(t) = \int_{\mathbb{K}} g(v) d\mu_t(v)$ auf Ω Borel-meßbar ist.²²⁾ Wir identifizieren zwei verallgemeinerte Steuerungen $\mu' = \{\mu'_t\}$ und $\mu'' = \{\mu''_t\}$, wenn $\mu'_t \equiv \mu''_t$ für fast alle $t \in \Omega$ gilt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von verallgemeinerten Steuerungen wird mit $\mathcal{Y}(\mathbb{K})$ bezeichnet. Die Konvergenz einer Folge $\{\mu^N\}$, $\mathcal{Y}(\mathbb{K})$ gegen ein Grenzelement $\mu \in \mathcal{Y}(\mathbb{K})$ erklären wir durch

$$\mu^N \rightarrow \mu \iff \int_{\Omega} \int_{\mathbb{K}} f(t) g(v) (d\mu_t^N(v) - d\mu_t(v)) dt \rightarrow 0 \quad \text{für alle } f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}), g \in C^0(\mathbb{K}, \mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Definition 2.4. (Erzeugung verallgemeinerter Steuerungen durch Funktionenfolgen):²³⁾ *Wir sagen, daß die Funktionenfolge $\{u^N\}$, $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ die verallgemeinerte Steuerung $\mu \in \mathcal{Y}(\mathbb{K})$ erzeugt, falls $u^N(t) \in \mathbb{K} \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$ und*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(t) g(u^N(t)) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{K}} f(t) g(v) d\delta_{u^N(t)}(v) dt = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{K}} f(t) g(v) d\mu_t(v) dt, \quad (2.4)$$

für alle $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, $g \in C^0(\mathbb{K}, \mathbb{R})$ gilt.

Definition 2.5. (verallgemeinerte Jacobi-Steuerungen, “Youngsche Gradientenmaße”):²⁴⁾ *Maßwertige Abbildungen $\mu \in \mathcal{Y}(\mathbb{K})$, die (im Sinne von Definition 2.4.) von einer Funktionenfolge $\{Jx^N\}$, $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ mit $x \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $Jx^N(t) \in \mathbb{K} \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$ erzeugt werden, heißen verallgemeinerte Jacobi-Steuerungen. Die Menge der betreffenden Äquivalenzklassen soll mit $\mathcal{J}(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{Y}(\mathbb{K})$ bezeichnet werden.*

¹⁹⁾ [DACOROGNA 08], p. 159 f., Theorem 5.3., (i), und Remark 5.4., (iii). Der Begriff der Quasikonvexität kann in diese Reihe ohne weitere Voraussetzungen nicht eingeordnet werden (siehe aber Satz 2.9. unten und [CONTI 08]).

²⁰⁾ Ebenda, p. 47, Theorem 2.31.

²¹⁾ [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00], p. 341, Corollary 2.5.

²²⁾ Siehe [GAMKRELIDZE 78], pp. 23 ff., und [MÜLLER 99], p. 115 ff.

²³⁾ Vergleiche [PEDREGAL 97], pp. 96 ff.

²⁴⁾ [KINDERLEHRER/PEDREGAL 91], p. 333, [MÜLLER 99], p. 126, Definition 4.1.

Satz 2.6. (Eigenschaften der Räume $\mathcal{Y}(\mathbf{K})$ und $\mathcal{J}(\mathbf{K})$):

- 1)²⁵⁾ Jede Folge $\{u^N\}$, $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ mit $u^N(t) \in \mathbf{K} \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$ besitzt eine schwach*-konvergente Teilfolge, die eine verallgemeinerte Steuerung $\mu \in \mathcal{Y}(\mathbf{K})$ erzeugt.
- 2)²⁶⁾ Jede Folge $\{x^N\}$, $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\|x^N\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq C$, $Jx^N(t) \in \mathbf{K} \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$ besitzt eine Teilfolge $\{x^{N'}\}$ mit $x^{N'} \rightarrow C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $x \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $Jx^{N'} \xrightarrow{*} L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm}) Jx \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$. Also erzeugt $\{Jx^{N'}\}$ eine verallgemeinerte Jacobi-Steuerung $\mu \in \mathcal{J}(\mathbf{K})$.
- 3)²⁷⁾ Die Menge $\mathcal{Y}(\mathbf{K})$ ist bezüglich der Topologie aus (2.3) folgenkompakt.
- 4)²⁸⁾ Die Menge $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ der verallgemeinerten Jacobi-Steuerungen bildet eine folgenkompakte Teilmenge von $\mathcal{Y}(\mathbf{K})$.

Der Mittelwertsatz von KINDERLEHRER/PEDREGAL kann auf verallgemeinerte Jacobi-Steuerungen $\mu \in \mathcal{J}(\mathbf{K})$ wie folgt erweitert werden:

Satz 2.7. (Mittelwertsatz für verallgemeinerte Jacobi-Steuerungen):²⁹⁾ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ Abschluß eines Lipschitzgebiets im strengen Sinne mit $\mathbf{o} \in \text{int}(\Omega)$. Wir betrachten Folgen $\{w^N\}$, $\mathbf{K}$ und $\{x^N\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

- a) $w^N \rightarrow w \in \mathbf{K}$ (dabei sind w^N und $w \in \mathbb{R}^{nm}$ als (n, m) -Matrizen aufzufassen),
- b) $w^N + Jx^N(t) \in \mathbf{K} \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$,
- c) $\{w^N + Jx^N\}$ erzeugt eine verallgemeinerte Jacobi-Steuerung $\mu \in \mathcal{J}(\mathbf{K})$.

Dann existiert eine Folge von Lipschitzfunktionen $\{\tilde{x}^N\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{x}^N\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)} = 0$,
- 2) $w^N + J\tilde{x}^N(t) \in \mathbf{K} \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$,
- 3) Die Folge $\{w^N + J\tilde{x}^N\}$ erzeugt eine konstante verallgemeinerte Jacobi-Steuerung $\nu = \{\nu\} \in \mathcal{J}(\mathbf{K})$, welche als t -Mittelwert von μ aufgefaßt werden kann:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(w^N + Jx^N(t)) dt &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{K}} g(v) d\mu_t(v) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(w^N + J\tilde{x}^N(t)) dt = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{K}} g(v) d\nu(v) dt \quad \forall g \in C^0(\mathbf{K}, \mathbb{R}); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$4) \text{ Es gilt: } w = \begin{pmatrix} \int_{\mathbf{K}} v_{11} d\nu(v) & \dots & \int_{\mathbf{K}} v_{1m} d\nu(v) \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\mathbf{K}} v_{n1} d\nu(v) & \dots & \int_{\mathbf{K}} v_{nm} d\nu(v) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Satz 2.7. rechtfertigt die Definition eines Mittelwertoperators $A: \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow rca^{pr}(\mathbf{K})$, der jeder verallgemeinerten Jacobi-Steuerung $\mu \in \mathcal{J}(\mathbf{K})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $A(\mu) = \nu$ als ihren t -Mittelwert zuordnet.

c) Eigenschaften der unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion $f^{(qc)}$.

Aus [WAGNER 09A] entnehmen wir folgende Aussagen:

- ²⁵⁾ [MÜLLER 99], p. 115 f., Theorem 3.1.
- ²⁶⁾ [WAGNER 07], p. 10, Theorem 2.14., 1).
- ²⁷⁾ [BERLIOCCI/LASRY 73], p. 144, Proposition 1, (i); unabhängig nochmals bewiesen in [KRAUT/PICKENHAIN 90], p. 391, Theorem 4.
- ²⁸⁾ [WAGNER 07], p. 10, Theorem 2.14., 2).
- ²⁹⁾ Ebenda, p. 11, Theorem 2.16., als Verallgemeinerung von [KINDERLEHRER/PEDREGAL 91], p. 334, Theorem 2.1.

Satz 2.8. (Halbstetigkeit und Stetigkeit von $f^{(qc)}$):³⁰⁾ Gegeben sei eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}_K$.

1) Dann ist die Funktion $f^{(qc)}: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig.

2) $f^{(qc)}$ ist in allen Punkten $v \in \text{int}(K)$ stetig.

3) Überdies ist die Einschränkung $f^{(qc)}|_K$ in allen Punkten $v \in \text{ext}(K)$ stetig, und für diese Punkte gilt $f^c(v) = f^{(qc)}(v) = f(v)$.

Aus $\partial K = \text{ext}(K)$ ergibt sich demzufolge, daß $f^{(qc)}|_K$ auf ganz K stetig ist, und dann gehört zusammen mit f auch $f^{(qc)}$ zu $\mathcal{F}_K$.

Satz 2.9. (Quasikonvexität und Rang-1-Konvexität von $f^{(qc)}$):³¹⁾ Sei $f \in \mathcal{F}_K$. Dann ist die Funktion $f^{(qc)}: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sowohl quasikonvex (im Sinne von Definition 1.2.) als auch Rang-1-konvex. Außerdem gilt für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$:

$$f^c(v) \leq f^{pc}(v) \leq f^{(qc)}(v) \leq f^{rc}(v) \leq f(v). \quad (2.7)$$

Für $n = 1$ oder $m = 1$ stimmen die Hüllfunktionen f^c , f^{pc} , $f^{(qc)}$ und f^{rc} überein.

d) Zwei Darstellungssätze für $f^{(qc)}$.

Für Funktionen $f \in \mathcal{F}_K$ gestattet $f^{(qc)}$ die folgende Darstellung mit Jacobimatrizen:

Satz 2.10. (Erster Darstellungssatz für $f^{(qc)}$):³²⁾ Sei eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}_K$ gegeben. Dann besitzt ihre unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Darstellung

$$f^{(qc)}(v_0) = \begin{cases} f^*(v_0) & | \ v_0 \in \text{int}(K); \\ \lim_{v \rightarrow v_0, v \in \mathbb{R} \cap \text{int}(K)} f^*(v) & | \ v_0 \in \partial K; \\ (+\infty) & | \ v_0 \in \mathbb{R}^{nm} \setminus K, \end{cases} \quad (2.8)$$

wobei $\mathbb{R} = \overrightarrow{\mathbf{o} v_0}$ den Strahl bezeichnet, der ausgehend vom Nullpunkt durch v_0 verläuft, und $f^*(v_0)$ durch

$$f^*(v_0) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v_0 + Jx(t)) dt \mid x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n), v_0 + Jx(t) \in K \ (\forall) t \in \Omega \right\} \in \overline{\mathbb{R}} \quad (2.9)$$

erklärt ist.

Analog zur konvexen Hüllfunktion³³⁾ gestattet $f^{(qc)}$ auch eine Darstellung mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dazu erklären wir folgende Mengen:

Definition 2.11. (mengenwertige Abbildung $S^{(qc)}$):³⁴⁾ Zu $v_0 \in K$ definieren wir folgende Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen:

$$S^{(qc)}(v_0) = \left\{ \nu \in rca^{pr}(K) \mid \text{es existieren Folgen } \{v^N\}, \text{int}(K) \text{ und } \{x^N\}, W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ mit} \right. \quad (2.10) \\ \left. a) \lim_{N \rightarrow \infty} v^N = v_0, \right.$$

³⁰⁾ [WAGNER 09A], p. 89, Theorem 3.14. und 3.16., zusammen mit p. 95, Theorem 4.1.

³¹⁾ Ebenda, p. 93, Theorem 3.19., zusammen mit p. 95, Theorem 4.1. und 4.2. Die Ungleichung $f^{pc}(v) \leq f^{(qc)}(v)$ folgt aus [WAGNER 08B], p. 25.

³²⁾ [WAGNER 09A], p. 95, Theorem 4.1.

³³⁾ Siehe [WAGNER 06A], p. 131, Satz 10.19., 3).

³⁴⁾ Zusammenfassung von [WAGNER 07], p. 15, Definition 3.1. und Lemma 3.2., sowie p. 21, Theorem 3.9., 2).

- b) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x^N\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)} = 0$,
c) $v^N + Jx^N(t) \in K \ (\forall) t \in \Omega \ \forall N \in \mathbb{N}$,
d) $\{v^N + Jx^N\}$ erzeugt die konstante verallgemeinerte Jacobi-Steuerung $\nu = \{\nu\}$.

Satz 2.12. (Zweiter Darstellungssatz für $f^{(qc)}$):³⁵⁾ Sei eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}_K$ gegeben. Dann besteht mit der mengenwertigen Abbildung $S^{(qc)}: K \rightarrow \mathfrak{P}(\text{rca}^{pr}(K))$ aus Definition 2.11. für alle $v_0 \in K$ die Darstellung

$$f^{(qc)}(v_0) = \text{Min} \left\{ \int_K f(v) d\nu(v) \mid \nu \in S^{(qc)}(v_0) \right\}. \quad (2.11)$$

3. Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f^{(qc)}$.

a) Globale Lipschitz-Stetigkeit von $f^{(qc)}$.

Beweis von Satz 1.4., 1):³⁶⁾ Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß man die Einschränkung $f^c|_K$ zu einer finiten, konvexen Funktion $h: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Gesamtraum fortsetzen kann: h ist insbesondere in der Umgebung jedes Punktes $v \in K$ lokal Lipschitz-stetig, so daß wir K mit einer Familie $\{K(v, \delta(v))\}_{v \in K}$ offener Kugeln derart überdecken können, daß h auf $K(v, \delta(v))$ jeweils Lipschitz-stetig mit Konstante $L(v) > 0$ ist. Da K kompakt ist, kann man aus $\{K(v, \delta(v))\}_{v \in K}$ eine endliche Teilüberdeckung mit $K \subset K(v_1, \delta(v_1)) \cup \dots \cup K(v_N, \delta(v_N))$ auswählen. Zusammen folgt, daß $h|_K = f^c|_K$ auf K global Lipschitz-stetig mit Konstante $\text{Max}(L(v_1), \dots, L(v_N))$ ist.

Um zu beweisen, daß f^c die verlangte Fortsetzung besitzt, ziehen wir folgendes Lemma heran:

Lemma 3.1.:³⁷⁾ Gegeben seien ein konvexer Körper $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ und eine konvexe Funktion $g: K \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn zu jedem Punkt $v_0 \in \partial K$ mindestens ein Punkt $w(v_0) \in \text{int}(K)$ mit

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+0} \frac{g(v_0 + \tau(w(v_0) - v_0)) - g(v_0)}{\tau} > (-\infty) \quad (3.1)$$

existiert, so läßt sich g zu einer finiten, konvexen Funktion $h: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Gesamtraum fortsetzen.

Wir wählen daher einen Punkt $v_0 \in \partial K$ und einen beliebigen Punkt $w(v_0) \in \text{int}(K)$. Wegen $\partial K = \text{ext}(K)$ gilt $f^c(v_0) = f(v_0)$, und wir gelangen mit Zahlen $0 < \tau \leq 1$, $0 \leq \lambda_s \leq 1$, $1 \leq s \leq nm + 1$, und Punkten $v_s \in K$, $1 \leq s \leq nm + 1$, mit $\sum_s \lambda_s = 1$ und $\sum_s \lambda_s v_s = v_0 + \tau(w(v_0) - v_0)$ zu folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} f^c(v_0 + \tau(w(v_0) - v_0)) - f^c(v_0) &\geq \sum_s \lambda_s f(v_s) - f(v_0) \geq \sum_s \lambda_s (\varphi(v_s, v_0) - \varphi(v_0, v_0)) \\ &= \sum_s \lambda_s \langle a(v_0), v_s - v_0 \rangle = \langle a(v_0), \sum_s \lambda_s v_s - v_0 \rangle = \langle a(v_0), \tau(w(v_0) - v_0) \rangle \implies \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{f^c(v_0 + \tau(w(v_0) - v_0)) - f^c(v_0)}{\tau} \geq \langle a(v_0), w(v_0) - v_0 \rangle \geq - \sup_{v_0 \in \partial K} |a(v_0)| \cdot \text{Diam}(K) > (-\infty), \quad (3.3)$$

und $f^c|_K$ erfüllt die in Lemma 3.1. gestellte Bedingung. Also existiert eine finite, konvexe Fortsetzung von $f^c|_K$ auf den Gesamtraum, und der Beweis ist beendet. ■

³⁵⁾ [WAGNER 07], p. 3, Theorem 1.4.

³⁶⁾ Einen Beweis für Satz 1.4., 1) habe ich in der Literatur nicht auffinden können.

³⁷⁾ [FINTA 92], p. 28, Theorem 2.1.

Beweis von Satz 1.5.: Wir zeigen, daß $f^{(qc)}|K$ in der Umgebung jedes Punktes $v \in \partial K$ lokal Lipschitz-stetig ist. $f|K$ ist nach Voraussetzung und $f^c|K$ nach Satz 1.4., 1) global Lipschitz-stetig. Wir bezeichnen das Maximum der Lipschitzkonstanten von f und f^c mit L . Nun wählen wir eine Zahl $0 < \varepsilon < 1$ und betrachten einen beliebigen Punkt $v \in \partial K = \text{ext}(K)$ zusammen mit einem weiteren Punkt $w \in K \cap K(v, \varepsilon)$, $w \neq v$. Nach Satz 2.8., 3) und Satz 2.9. gilt:

$$\begin{aligned} f^c(w) &\leq f^{(qc)}(w) \leq f(w) \quad \text{und} \quad f^c(v) = f^{(qc)}(v) = f(v) \implies \\ -L \cdot |w - v| &\leq -|f^c(w) - f^c(v)| \leq f^c(w) - f^c(v) \leq f^{(qc)}(w) - f^{(qc)}(v) \leq f(w) - f(v) \\ &\leq |f(w) - f(v)| \leq L \cdot |w - v|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ebenso folgt:

$$\begin{aligned} -f(w) &\leq -f^{(qc)}(w) \leq -f^c(w) \quad \text{und} \quad f^c(v) = f^{(qc)}(v) = f(v) \implies \\ -L \cdot |v - w| &\leq -|f(v) - f(w)| \leq f(v) - f(w) \leq f^{(qc)}(v) - f^{(qc)}(w) \leq f^c(v) - f^c(w) \\ &\leq |f^c(v) - f^c(w)| \leq L \cdot |v - w| \end{aligned} \quad (3.5)$$

und zusammen

$$\sup_{w \in K \cap K(v, \varepsilon), w \neq v} |f^{(qc)}(v) - f^{(qc)}(w)| \leq L \cdot |v - w|. \quad (3.6)$$

Also ist $f^{(qc)}|K$ nicht nur auf $\text{int}(K)$, sondern sogar auf $\text{int}(K) \cup \partial K = K$ lokal Lipschitz-stetig. Nun ergibt sich die Aussage des Satzes wie am Beginn des Beweises zu Satz 1.4., 1). ■

b) Punkte, in denen $f^{(qc)}$ differenzierbar ist.

Wir betrachten eine Funktion $f \in \mathcal{F}_K$, die auf $\text{int}(K)$ differenzierbar ist. Dann gestattet uns Satz 2.3., bestimmte Punkte anzugeben, in denen sich die Differenzierbarkeit von f auf $f^{(qc)}$ überträgt:

Satz 3.2: Gegeben sei eine Funktion $f \in \mathcal{F}_K$, die auf $\text{int}(K)$ differenzierbar ist. Dann gilt:

1) **(Differenzierbarkeit in Punkten mit $f = f^{(qc)}$)** Die Funktion $f^{(qc)}$ ist in jedem Punkt $v_0 \in \text{int}(K)$ mit $f(v_0) = f^{(qc)}(v_0)$ differenzierbar, und für alle $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ gilt:

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{ij}}(v_0) = \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(v_0). \quad (3.7)$$

2) **(Differenzierbarkeit in globalen Minimalstellen von f)** Ist $v_0 \in \text{int}(K)$ eine globale Minimalstelle von f , so ist $f^{(qc)}$ in v_0 differenzierbar, und für alle $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ gilt:

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{ij}}(v_0) = \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(v_0) = 0. \quad (3.8)$$

3)³⁸⁾ **(Differenzierbarkeit auf den Trägern von “supporting measures”)** Sei $\nu_1 \in S^{(qc)}(v_1)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das in einem Punkt $v_1 \in K$ das Minimum aus Satz 2.12. realisiert:

$$f^{(qc)}(v_1) = \int_K f(v) d\nu_1(v) = \text{Min} \left\{ \int_K f(v) d\nu(v) \mid \nu \in S^{(qc)}(v_1) \right\}. \quad (3.9)$$

³⁸⁾ Vergleiche [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00], p. 346, Proposition 3.6.

Dann ist $f^{(qc)}$ in allen Punkten $v_0 \in \text{supp}(\nu_1) \cap \text{int}(K)$ differenzierbar, und für alle $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ gilt:

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{ij}}(v_0) = \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(v_0). \quad (3.10)$$

Beweis: Zu 1): Wegen $\varphi'(v) = f^{(qc)}(v) \leq f(v) = \varphi''(v)$ (Satz 2.9.) folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 2.3.

Zu 2): Einerseits gilt für $v_0 \in \text{argmin}(f) \cap \text{int}(K)$ die Ungleichung $f^{(qc)}(v_0) \leq f(v_0)$, andererseits folgt aus dem zweiten Darstellungssatz für $f^{(qc)}$ (Satz 2.12.) zusammen mit dem Satz über die Konvexität des Integrals (siehe [BOURBAKI 52], Chap. IV, § 6, p. 204, Corollaire), daß der Wertebereich von $f^{(qc)}$ in der abgeschlossen-konvexen Hülle des (kompakten) Wertebereichs von f enthalten ist. Also ist $f^{(qc)}(v_0) < f(v_0) = \text{Min}_{v \in K} f(v)$ unmöglich, und wir dürfen nochmals Satz 2.3. anwenden.

Zu 3): Sei $\nu_1 \in S^{(qc)}(v_1)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit den vorausgesetzten Eigenschaften. Aus [WAGNER 09C], p. 615, Theorem 3.9., ergibt sich, daß die Gleichung $f^{(qc)}(v_0) = f(v_0)$ für alle $v_0 \in \text{supp}(\nu_1) \cap \text{int}(K)$ besteht, so daß Satz 2.3. erneut angewendet werden kann. ■

c) Eine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit von $f^{(qc)}$.

Beweis zu Satz 1.6.: • Schritt 1: Seien ein Punkt $v_0 \in \text{int}(K)$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_0 \in S^{(qc)}(v_0)$, eine erzeugende Folge $\{x^N\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und eine Zahl $0 < \mu < 1$ gegeben, die gemeinsam die Voraussetzungen a) – c) des Satzes erfüllen. Dann besteht insbesondere die Gleichung

$$f^{(qc)}(v_0) = \int_K f(v) d\nu_0(v), \quad (3.11)$$

und die verallgemeinerten Steuerungen $\{\delta_{v_0 + Jx^N(t)}\}$ konvergieren im Sinne von (2.3) gegen die konstante verallgemeinerte Steuerung $\{\nu_0\}$. Nun wählen wir einen weiteren Punkt $w \in \text{int}(K)$. Wegen $v_0 + Jx^N(t) \in \mu K$ ($\forall t \in \Omega \forall N \in \mathbb{N}$) gilt dann für alle hinreichend kleinen Zahlen $h > 0$:

$$v_0 + h(w - v_0) + Jx^N(t) \in K \quad (\forall t \in \Omega \quad \forall N \in \mathbb{N}). \quad (3.12)$$

Nach Satz 2.6., 2) erzeugt eine Teilfolge der Funktionenfolge $\{v_0 + h(w - v_0) + Jx^N\}$ eine verallgemeinerte Jacobi-Steuerung $\mu \in \mathcal{J}(K)$, deren Mittelwert $A(\mu) = \nu_h \in rca^{pr}(K)$ zu $S^{(qc)}(v_0 + h(w - v_0))$ gehört (wir behalten den Index N bei). Nach erneuter Anwendung der Sätze 2.12. und 2.7. erhalten wir:

$$f^{(qc)}(v_0 + h(w - v_0)) \leq \int_K f(v) d\nu_h(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v_0 + h(w - v_0) + Jx^N(t)) dt. \quad (3.13)$$

Zusammen mit

$$f^{(qc)}(v_0) = \int_K f(v) d\nu_0(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v_0 + Jx^N(t)) dt \quad (3.14)$$

ergibt sich folgende Abschätzung für den Differenzenquotienten von $f^{(qc)}$:

$$\begin{aligned} D(w - v_0, h) &= \frac{1}{h} \left(f^{(qc)}(v_0 + h(w - v_0)) - f^{(qc)}(v_0) \right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \left(f(v_0 + Jx^N(t) + h(w - v_0)) - f(v_0 + Jx^N(t)) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

• **Schritt 2:** Die Funktion $\tilde{f}$ ist auf einer offenen Umgebung von K stetig differenzierbar. Also dürfen wir auf K eine Taylorentwicklung vornehmen,³⁹⁾ so daß für alle $v \in K$, $z \in \mathbb{R}^{nm}$ und alle hinreichend kleinen $h > 0$ eine Darstellung

$$\tilde{f}(v + h z) - \tilde{f}(v) - \nabla \tilde{f}(v)^T h z = R(v, h z) \quad (3.16)$$

besteht. Dabei ist $R(v, h z)$ für festes z und h als Funktion von v auf K stetig. Aus der stetigen Differenzierbarkeit von $\tilde{f}$ folgt außerdem Fréchet-Differenzierbarkeit, und das bedeutet: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle hinreichend kleinen $0 < h \leq 1$, alle $v \in K$ und $z \in \mathbb{R}^{nm}$ die Implikation

$$|h z| \leq \delta(\varepsilon) \implies |R(v, h z)| \leq \varepsilon \cdot |h z| \quad (3.17)$$

besteht (vergleiche [IOFFE/TICHOMIROV 79], p. 36). Daraus folgt einerseits für festes $v \in K$, $z \in \mathbb{R}^{nm}$ die Relation

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(v, h z)}{h} = 0, \quad (3.18)$$

andererseits ergibt sich für festes $z \in \mathbb{R}^{nm}$ sogar die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge

$$\left\{ \frac{R(v, (1/N) z)}{1/N} \right\}, C^0(K, \mathbb{R}) \quad (3.19)$$

bezüglich $v \in K$ und die Existenz einer stetigen Majorante. Damit erhalten wir aus (3.15):

$$D(w - v_0, h) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla \tilde{f}(v_0 + J x^N(t))^T (w - v_0) dt \quad (3.20)$$

$$+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{R(v_0 + J x^N(t), h(w - v_0))}{h} dt$$

$$= \int_K \nabla \tilde{f}(v)^T (w - v_0) d\nu_0(v) + \int_K \frac{R(v, h(w - v_0))}{h} d\nu_0(v). \quad (3.21)$$

Aus der majorisierten Konvergenz $\lim_{h \rightarrow 0} R(v, h(w - v_0))/h = 0$ für alle $v \in K$ folgt:

$$D^+(w - v_0) = \limsup_{h \rightarrow 0+0} D(w - v_0, h) \leq \int_K \nabla \tilde{f}(v)^T (w - v_0) d\nu_0(v) = E(w - v_0). \quad (3.22)$$

• **Schritt 3:** Aus [WAGNER 09A] entnehmen wir zwei Lemmata über quasikonvexe Funktionen, die den Wert $(+\infty)$ annehmen können:

Lemma 3.3.:⁴⁰⁾ Gegeben seien ein Punkt $w \in \mathbb{R}^{nm}$ und eine Zahl $\mu > 0$. Dann ist zusammen mit $f(v) : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ auch die Funktion $g(v) = f(w + \mu v)$ quasikonvex.

Lemma 3.4.:⁴¹⁾ Gegeben seien ein konvexer Körper $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ und eine quasikonvexe Funktion $f : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\text{dom}(f) = K$. Wenn $f|_K$ beschränkt ist, so ist die Einschränkung $f|_{\text{int}(K)}$ Rang-1-konvex.

Nach Lemma 3.3. ist zusammen mit $f^{(qc)}$ auch $g(v) = f^{(qc)}(v + h(w - v)) = f^{(qc)}(h w + (1 - h)v)$ als Funktion von v quasikonvex. Wegen $\text{dom}(g) = \{v \in \mathbb{R}^{nm} \mid v \in \frac{1}{1-h} K - \{h w\}\}$ und $w \in \text{int}(K)$ folgt

³⁹⁾ Die Differenzierbarkeit von $\tilde{f}$ mußte auf einer Umgebung von K vorausgesetzt werden, um das Bestehen der Taylorentwicklung auch auf ∂K sichern zu können.

⁴⁰⁾ [WAGNER 09A], p. 74, Lemma 2.10., (3).

⁴¹⁾ Ebenda, p. 74, Theorem 2.12.

$K(v_0, \delta) \subset \text{int}(\frac{1}{1-h} K - \{h w\})$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ und alle hinreichend kleinen $h > 0$. Aus Lemma 3.4. ergibt sich dann, daß $g(v)$ auf $K(v_0, \delta)$ Rang-1-konvex und daher auch separat konvex ist. Daraus folgt: Für alle $w \in \text{int}(K)$ und alle hinreichend kleinen $h > 0$ ist $D(w - v_0, h)$ als Funktion von $(w - v_0)$ auf dem Inneren ihres (konvexen) effektiven Definitionsbereichs und insbesondere für $(w - v_0) \in K(\mathfrak{o}, \delta)$ separat konvex. Bei der punktweisen Bildung des Limes superior überträgt sich diese Eigenschaft auf $D^+(w - v_0)$. Außerdem ist D^+ als Funktion von $(w - v_0)$ positiv homogen mit $D^+(v_0 - v_0) = 0$. $E(w - v_0)$ ist eine lineare Funktion von $(w - v_0)$. Nun darf Satz 2.3. auf $\varphi'(w - v_0) = D^+(w - v_0)$ und $\varphi'' = E^+(w - v_0)$ angewendet werden: Beide Funktionen sind in $(v_0 - v_0)$ differenzierbar mit

$$\nabla D^+(v_0 - v_0) = \nabla E^+(v_0 - v_0) = \left(\int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{ij}}(v) d\nu_0(v) \right)_{i,j}. \quad (3.23)$$

Daraus folgt, daß D^+ und E^+ für $w \in K(v_0, \delta)$ und damit sogar für beliebige $w \in \mathbb{R}^{nm}$ übereinstimmen, und es gilt

$$D^+(w - v_0) = \sum_{i,j} \int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{ij}}(v) d\nu_0(v) (w_{ij} - v_{0,ij}). \quad (3.24)$$

• **Schritt 4:** Aus Satz 2.3. folgt insbesondere, daß für eine separat konvexe Funktion aus dem Bestehen der Relation (2.2) die Differenzierbarkeit in v_0 folgt (man setze $\varphi' = \varphi''$). Wir wenden daher Satz 2.3. nochmals an, um die Differenzierbarkeit der (in einer Umgebung von $v_0 \in \text{int}(K)$ separat konvexen) Funktion $f^{(qc)}$ in v_0 zu bestätigen. Dazu weisen wir nach, daß die Relation

$$\limsup_{w \rightarrow \mathfrak{o}} \frac{1}{|w|} \left(f^{(qc)}(v_0 + w) - f^{(qc)}(v_0) - \nabla D^+(v_0 - v_0)^T w \right) \leq 0 \quad (3.25)$$

besteht. Angenommen, es gäbe ein $\delta > 0$ und eine Folge $\{w^N\}$, $\text{int}(K) \rightarrow \mathfrak{o}$ mit

$$\delta < \frac{1}{|w^N|} \left(f^{(qc)}(v_0 + w^N) - f^{(qc)}(v_0) - \nabla D^+(v_0 - v_0)^T w^N \right) \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (3.26)$$

Dann findet man eine konvergente Teilfolge von $\{w^N/|w^N|\} \rightarrow w_0$ (wir behalten den Index N bei). Weil $f^{(qc)}$ als separat konvexe Funktion auf $\text{int}(K)$ lokal Lipschitz-stetig ist (Satz 2.2.), gilt entlang dieser Teilfolge:

$$\delta < \frac{1}{|w^N|} \left(f^{(qc)}(v_0 + w^N) \pm f^{(qc)}(v_0 + w_0 |w^N|) - f^{(qc)}(v_0) \right) - \nabla D^+(v_0 - v_0)^T \frac{w^N}{|w^N|} \quad (3.27)$$

$$\leq \frac{L}{|w^N|} \cdot \left| (v_0 + w^N) - (v_0 + w_0 |w^N|) \right| \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{|w^N|} \left(f^{(qc)}(v_0 + |w^N| w_0) - f^{(qc)}(v_0) \right) - \nabla D^+(v_0 - v_0)^T \frac{w^N}{|w^N|} \implies \\ 0 < \delta < \limsup_{N \rightarrow \infty} \dots = D^+((w_0 + v_0) - v_0) - \nabla D^+(v_0 - v_0)^T ((w_0 + v_0) - v_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

und es entsteht ein Widerspruch. Also ist $f^{(qc)}$ im Punkt $v_0 \in \text{int}(K)$ differenzierbar, und der Beweis ist beendet. ■

Der Beweis zeigt, daß die von BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN verwendete Technik, die Ableitungen semi-konvexer Hüllfunktionen mit Hilfe von “supporting measures” zu bestimmen, nur eingeschränkt auf $f^{(qc)}$ übertragen werden kann. Außerdem bleibt anzumerken, daß die Voraussetzungen von Satz 1.6. in jeder der drei Teilaussagen von Satz 3.2. durch das Diracmaß $\delta_{v_0} \in S^{(qc)}(v_0)$, die Folge $\{\mathfrak{o}\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\mu = 1/2$ erfüllt werden. Insofern kann Satz 1.6. als Verallgemeinerung von Satz 3.2. betrachtet werden.

d) Beispiel: Die Ableitungen von $f^{(qc)}$ können nicht durch ein “supporting measure” dargestellt werden.

Wir wollen ein Beispiel angeben, in dem die Ableitung von $f^{(qc)}$ in einem Differenzierbarkeitspunkt $v_0 \in \text{int}(K)$ nicht durch die Formel (1.7) ausgedrückt werden kann. Dazu greifen wir auf eine Funktion zurück, die bereits in [WAGNER 06B] untersucht wurde. Im folgenden sollen Punkte $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ als $(2, 2)$ -Matrizen aufgefaßt werden.

Lemma 3.5.:⁴²⁾ Seien die Punkte $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und die konvexe Menge $C = \{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid b^2 + c^2 + d^2 \leq 1 \}$ gegeben. Wir definieren $K_1 = \text{co}(\{v_1\} \cup C)$, $K_2 = \text{co}(\{v_2\} \cup C)$ und $K = K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Die Funktion $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei durch

$$f(v) = \begin{cases} (a^2 - 1)^2 & \mid v \in K \\ (+\infty) & \mid v \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus K \end{cases} \quad (3.30)$$

gegeben. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1)⁴³⁾ K ist ein konvexer Körper mit $\mathbf{o}_4 \in \text{int}(K)$ und $\text{ext}(K) = \{v_1, v_2\} \cup (\text{ext}(C) \setminus \{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\})$.
- 2)⁴⁴⁾ f gehört zu $\mathcal{F}_K$, und $f \mid \text{int}(K)$ ist beliebig oft differenzierbar.
- 3) Obwohl die Funktion f die Voraussetzungen a) und b) aus Satz 1.4., 1) erfüllt, ist $f^c \mid K$ unstetig: Für alle $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{ext}(C)$ mit $b \neq (-1)$ ist $f^c(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 1$, dagegen ist $f^c(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$.
- 4) Für alle $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{ext}(C)$ mit $b \neq (-1)$ ist $f^{(qc)}(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 1$, dagegen ist $f^{(qc)}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$.

Beweis: Zu 3): Wegen $f(v) \geq 0$ für alle $v \in K$ kann man die Voraussetzungen a) und b) von Satz 1.4., 1) mit $\varphi(v_0, v) \equiv 0$ für alle $v_0 \in \partial K$ erfüllen. Nach [WAGNER 06B], p. 241 f., Theorem 5, ii), gilt jedoch $f^c(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 1$ für alle Punkte $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{ext}(C)$ mit $b \neq (-1)$ und $f^c(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$.

Zu 4): Aus Teil 3) und Satz 2.9. ergibt sich für alle Punkte $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{ext}(C)$ mit $b \neq (-1)$:

$$1 = f^c(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}) \leq f^{(qc)}(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}) \leq f(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 1 \quad (3.31)$$

und damit Gleichheit. Da $[v_1, v_2]$ eine Rang-1-Strecke ist, folgt weiter

$$f^{rc}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \leq \frac{1}{2} f^{rc}(v_1) + \frac{1}{2} f^{rc}(v_2) \leq \frac{1}{2} f(v_1) + \frac{1}{2} f(v_2) = 0 \quad (3.32)$$

und erneut mit Satz 2.9.

$$0 = f^c(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \leq f^{(qc)}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \leq f^{rc}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \leq 0. \quad \blacksquare \quad (3.33)$$

Beweis von Satz 1.7.: • Schritt 1: Untersuchung der Unstetigkeitsstelle von $f^{(qc)}$ in $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir setzen $w_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und wählen einen weiteren Punkt $w_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{ext}(C) \cap \text{ext}(K)$ mit $b \neq (-1)$ und $|w_1 - w_0| \leq 0.1$. Nach Lemma 3.5., 4) gilt $f^{(qc)}(w_1) = 1$ und $f^{(qc)}(w_0) = 0$. Nach Satz 2.10. ist jedoch $f^{(qc)}$ radial stetig, also existieren Zahlen $\delta_0, \delta_1 > 0$ mit

$$\begin{aligned} |w - w_0| \leq \delta_0 &\implies f^{(qc)}(w) \leq 0.05 \quad \forall w \in R_0 = \overrightarrow{\mathbf{o} w_0}; \\ |w - w_1| \leq \delta_1 &\implies f^{(qc)}(w) \geq 0.95 \quad \forall w \in R_1 = \overrightarrow{\mathbf{o} w_1}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

⁴²⁾ Siehe [WAGNER 06B], p. 241, Definition 7.

⁴³⁾ Ebenda, p. 241, Lemma 1.

⁴⁴⁾ Ebenda, p. 241 f., Theorem 5.

Darin bezeichnen R_0 und R_1 die von $\mathfrak{o}$ ausgehenden Strahlen durch w_0 bzw. w_1 . Nun setzen wir $\delta_2 = \text{Min}(\delta_0, \delta_1) > 0$ und bestimmen Punkte $z_0 \in R_0$ und $z_1 \in R_1$ mit $|z_0 - w_0| = \delta_2$ und $|z_1 - w_1| = \delta_2$. In den Punkten $z_0, z_1 \in \text{int}(K)$ ist $f^{(qc)}$ stetig (Satz 2.8., 2)), also existieren Zahlen $\delta_3, \delta_4 > 0$ mit

$$\begin{aligned} |z - z_0| \leq \delta_3 &\implies |f^{(qc)}(z) - f^{(qc)}(z_0)| \leq 0.05 \quad \forall z \in \text{int}(K); \\ |z - z_1| \leq \delta_4 &\implies |f^{(qc)}(z) - f^{(qc)}(z_1)| \leq 0.05 \quad \forall z \in \text{int}(K). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Setzen wir

$$\delta_5 = \text{Min}\left(\frac{\delta_2}{2}, \delta_3, \delta_4, \frac{1}{2} \cdot |w_1 - w_0|\right), \quad (3.36)$$

so folgt: $K(z_0, \delta_5) \subset \text{int}(K)$, $K(z_1, \delta_5) \subset \text{int}(K)$ sowie

$$\begin{aligned} z \in K(z_0, \delta_5) &\implies f^{(qc)}(z) \leq 0.1; \\ z \in K(z_1, \delta_5) &\implies f^{(qc)}(z) \geq 0.9. \end{aligned} \quad (3.37)$$

• **Schritt 2:** Auffinden einer Strecke, auf der $f^{(qc)}$ λ^1 -fast überall differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit Z die konvexe Menge $\text{co}(K(z_0, \delta_5) \cup K(z_1, \delta_5)) \subset \text{int}(K)$ und mit N die λ^4 -Nullmenge jener Punkte $v \in \text{int}(K)$, wo $f^{(qc)}$ nicht differenzierbar ist. Zusammen mit N ist auch $Z \cap N$ eine λ^4 -Nullmenge. Nun betrachten wir die Schar $\{G_p\}_{p \in \mathbb{R}^3}$ aller Geraden, die zur Strecke $w_0 w_1$ parallel sind. Nach [DIEUDONNÉ 75], p. 232, Satz 13.21.5., bilden dann für λ^3 -fast alle $p \in \mathbb{R}^3$ die Durchschnitte $Z \cap N \cap G_p$ eindimensionale Nullmengen. Wir können daher Punkte $y_0 \in K(z_0, \delta_5)$ und $y_1 \in K(z_1, \delta_5)$ derart wählen, daß ihre Verbindungsstrecke $S = \overline{y_0 y_1}$ zu $w_0 w_1$ parallel ist und $f^{(qc)}$ auf S λ^1 -fast überall differenzierbar ist.

• **Schritt 3:** Die Annahme, daß die partiellen Ableitungen von $f^{(qc)}$ entlang der Strecke S stets gemäß (1.7) dargestellt werden können, führt zum Widerspruch. Nach [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00], p. 340, Corollary 2.3., sind die Ableitungen von $f^{(qc)}$ auf ihrem Definitionsbereich stetig, und weil $f^{(qc)}$ auf der kompakten Menge Z sogar global Lipschitz-stetig ist, sind sie auf $Z \setminus N$ gleichmäßig beschränkt. Zusammen folgt, daß die Einschränkungen der partiellen Ableitungen von $f^{(qc)}$ auf S zum $L^\infty[S, \lambda^1]$ gehören. Damit darf entlang S der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Fassung fürs Lebesgue-Integral angewendet werden ([ELSTRODT 96], p. 301, Satz 4.14.):

$$f^{(qc)}(y_1) - f^{(qc)}(y_0) = \int_S \nabla f^{(qc)}(v)^T \mathfrak{e} dv, \quad (3.38)$$

worin $\mathfrak{e}$ den Einheitsvektor in Richtung $(w_1 - w_0)$ bezeichnet. Nun nehmen wir an, daß die partiellen Ableitungen von $f^{(qc)}$ in allen Differenzierbarkeitspunkten $v_0 \in \text{int}(K)$ die Darstellung gemäß (1.7)

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{ij}}(v_0) = \int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{ij}}(v) d\nu_0(v), \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 2 \quad (3.39)$$

mit $\tilde{f}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a^2 - 1)^2$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_0 \in S^{(qc)}(v_0)$ mit $f^{(qc)}(v_0) = \int_K f(v) d\nu_0(v)$ gestatten. Das bedeutet:

$$|\nabla f^{(qc)}(v_0)| = \left| \left(\int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{ij}}(\tilde{v}) d\nu_0(\tilde{v}) \right)_{i,j} \right| = \left| \int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{11}}(\tilde{v}) d\nu_0(\tilde{v}) \right| \leq \int_K \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{11}}(\tilde{v}) \right| d\nu_0(\tilde{v}), \quad (3.40)$$

und wegen

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{11}}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 4a(a^2 - 1) \quad (3.41)$$

und $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K \implies -1 \leq a \leq 1$ ergibt sich daraus

$$|\nabla f^{(qc)}(v_0)| \leq \sup_{-1 \leq a \leq 1} |4a(a^2 - 1)| = \frac{8}{9}\sqrt{3} = 1.5396 \dots < 2. \quad (3.42)$$

Dann gelangen wir mit (3.37) zu folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} 0.8 &\leq f^{(qc)}(y_1) - f^{(qc)}(y_0) \leq \int_{y_0}^{y_1} |\nabla f^{(qc)}(v)| \cdot |\epsilon| \cdot |\cos \angle(\dots)| dv \leq |y_1 - y_0| \cdot \sup_{v \in S} |\nabla f^{(qc)}(v)| \\ &\leq (|z_1 - z_0| + 2\delta_5) \cdot 2 \leq 4|w_1 - w_0| \leq 0.4. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Der entstandene Widerspruch kann nur beseitigt werden, wenn man die Annahme aufgibt, daß die partielle Ableitung $\partial f^{(qc)}/\partial v_{11}$ entlang S fast überall eine Darstellung gemäß (1.7) gestattet. Die Strecke S muß daher Punkte v_0 enthalten, wo zwar $f^{(qc)}$ differenzierbar ist, jedoch kein Maß $\nu_0 \in S^{(qc)}(v_0)$ mit $f^{(qc)}(v_0) = \int_K f(v) d\nu_0(v)$ und

$$\frac{\partial f^{(qc)}}{\partial v_{11}}(v_0) = \int_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_{11}}(v) d\nu_0(v) \quad (3.44)$$

existiert. ■

Ob die Gültigkeit der Darstellung (1.7) in allen Differenzierbarkeitspunkten von $f^{(qc)}$ unter stärkeren Voraussetzungen an ∂K gesichert werden kann, muß offenbleiben.

Literaturverzeichnis.

1. [ANDREJEW/KLÖTZLER 84A] Andrejewa, J. A.; Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. Teil I.* Z. Angew. Math. Mech. **64** (1984), 35 – 44
2. [ANDREJEW/KLÖTZLER 84B] Andrejewa, J. A.; Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. Teil II.* Z. Angew. Math. Mech. **64** (1984), 147 – 153
3. [AUBERT/KORNPROBST 06] Aubert, G.; Kornprobst, P.: *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations.* Springer; New York etc. 2006, 2. Aufl.
4. [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00] Ball, J. M.; Kirchheim, B.; Kristensen, J.: *Regularity of quasiconvex envelopes.* Calc. of Var. **11** (2000), 333 – 359
5. [BALL/MURAT 84] Ball, J. M.; Murat, F.: *$W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals.* J. Funct. Anal. **58** (1984), 225 – 253
6. [BERLIOCCI/LASRY 73] Berliocchi, H.; Lasry, J.-M.: *Intégrales normales et mesures paramétrées en calcul des variations.* Bull. Soc. Math. France **101** (1973), 129 – 184
7. [BONNESEN/FENCHEL 74] Bonnesen, T.; Fenchel, W.: *Theorie der konvexen Körper.* Springer; Berlin - Heidelberg - New York 1974 (berichtigter Reprint der Erstauflage von 1934)
8. [BOURBAKI 52] Bourbaki, N.: *Éléments de Mathématique. Livre VI: Intégration, Chap. I – IV.* Hermann; Paris 1952
9. [BROKATE 85] Brokate, M.: *Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics.* J. Math. Biology **23** (1985), 75 – 101
10. [BRØNDSTED 83] Brøndsted, A.: *An Introduction to Convex Polytopes.* Springer; New York - Heidelberg - Berlin 1983

11. [BRUNE/MAURER/WAGNER 08] Brune, C.; Maurer, H.; Wagner, M.: *Edge detection within optical flow via multidimensional control*. BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-02/2008. Accepted for publication: SIAM Journal on Imaging Sciences
12. [CONTI 08] Conti, S.: *Quasiconvex functions incorporating volumetric constraints are rank-one convex*. J. Math. Pures Appl. **90** (2008), 15 – 30
13. [DACOROGNA 08] Dacorogna, B.: *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer; New York etc. 2008, 2. Aufl.
14. [DACOROGNA/MARCELLINI 97] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial case*. Acta Mathematica **178** (1997), 1 – 37
15. [DACOROGNA/MARCELLINI 98] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems*. J. Funct. Anal. **152** (1998), 404 – 446
16. [DACOROGNA/MARCELLINI 99] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *Implicit Partial Differential Equations*. Birkhäuser; Boston - Basel - Berlin 1999
17. [DIEUDONNÉ 75] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis. Band 2*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1975
18. [ELSTRODT 96] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer; Berlin etc. 1996
19. [EVANS/GARIEPY 92] Evans, L. C.; Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press; Boca Raton etc. 1992
20. [FEICHTINGER/TRAGLER/VELIOV 03] Feichtinger, G.; Tragler, G.; Veliov, V. M.: *Optimality conditions for age-structured control systems*. J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), 47 – 68
21. [FINTA 92] Finta, Z.: *On the extension of convex functions to the space $\mathbb{R}^n$* . In: Muntean, I. (Hrsg.): Seminar on Mathematical Analysis. “Babeş-Bolyai” University, Cluj-Napoca, Faculty of Mathematics, Research Seminars, Preprint Nr. 7 (1992), 23 – 32
22. [FRANEK/FRANEK/MAURER/WAGNER 08] Franek, L.; Franek, M.; Maurer, H.; Wagner, M.: *Image restoration and simultaneous edge detection by optimal control methods*. BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-05/2008. Submitted: Optim. Contr. Appl. Meth.
23. [FUNK 62] Funk, P.: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. Springer; Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962 (Grundlehren 94)
24. [GAMKRELIDZE 78] Gamkrelidze, R. V.: *Principles of Optimal Control Theory*. Plenum; New York - London 1978
25. [GRIEWANK/RABIER 90] Griewank, A.; Rabier, P. J.: *On the smoothness of convex envelopes*. Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), 691 – 709
26. [IOFFE/TICHOMIROV 79] Ioffe, A. D.; Tichomirow, V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1979
27. [KAWOHL 04] Kawohl, B.: *From Mumford-Shah to Perona-Malik in image processing*. Math. Meth. Appl. Sci. **27** (2004), 1803 – 1814
28. [KINDERLEHRER/PEDREGAL 91] Kinderlehrer, D.; Pedregal, P.: *Characterizations of Young measures generated by gradients*. Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991), 329 – 365
29. [KRAUT/PICKENHAIN 90] Kraut, H.; Pickenhain, S.: *Erweiterung von mehrdimensionalen Steuerungsproblemen und Dualität*. Optimization **21** (1990), 387 – 397
30. [LUR'E 75] Lur'e, K. A. (Лурье, К. А.): *Оптимальное управление в задачах математической физики*. Наука; Москва 1975
31. [MÜLLER 99] Müller, S.: *Variational models for microstructure and phase transitions*. In: Bethuel, F.; Huisken, G.; Müller, S.; Steffen, K.: Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems. Springer; Berlin etc. 1999 (Lecture Notes in Mathematics 1713), 85 – 210
32. [PEDREGAL 97] Pedregal, P.: *Parametrized Measures and Variational Principles*. Birkhäuser; Basel - Boston - Berlin 1997
33. [SCHNEIDER 93] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press; Cambridge 1993

-
34. [TING 69A] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars*. J. Math. Mech. **19** (1969), 531 – 551
 35. [TING 69B] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion problem III*. Arch. Rat. Mech. Anal. **34** (1969), 228 – 244
 36. [WAGNER 96] Wagner, M.: *Erweiterungen des mehrdimensionalen Pontrjaginschen Maximumprinzips auf meßbare und beschränkte sowie distributionelle Steuerungen*. Dissertation. Universität Leipzig 1996
 37. [WAGNER 06A] Wagner, M.: *Mehrdimensionale Steuerungsprobleme mit quasikonvexen Integranden*. Habilitationsschrift. BTU Cottbus 2006
 38. [WAGNER 06B] Wagner, M.: *Nonconvex relaxation properties of multidimensional control problems*. In: Seeger, A. (Hrsg.): Recent Advances in Optimization. Springer; Berlin etc. 2006 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 563), 233 – 250
 39. [WAGNER 07] Wagner, M.: *On the lower semicontinuous quasiconvex envelope for unbounded integrands (II): Representation by generalized controls*. EPF Lausanne, Publications de l'Institut d'analyse et calcul scientifique, Préimpression No. 09.2007. Accepted for publication: J. Convex Anal.
 40. [WAGNER 08A] Wagner, M.: *Quasiconvex relaxation of multidimensional control problems*. Adv. Math. Sci. Appl. **18** (2008), 305 – 327
 41. [WAGNER 08B] Wagner, M.: *Quasiconvex relaxation of multidimensional control problems with integrands $f(t, \xi, v)$* . Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig. Preprint Nr. 68/2008. Submitted: ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations.
 42. [WAGNER 09A] Wagner, M.: *On the lower semicontinuous quasiconvex envelope for unbounded integrands (I)*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **15** (2009), 68 – 101
 43. [WAGNER 09B] Wagner, M.: *Pontryagin's maximum principle for multidimensional control problems in image processing*. J. Optim. Theory Appl. **140** (2009), 543 – 576
 44. [WAGNER 09C] Wagner, M.: *Jensen's inequality for the lower semicontinuous quasiconvex envelope and relaxation of multidimensional control problems*. J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 606 – 619

Zuletzt geändert: 08.05.2009

Anschrift des Verfassers: Marcus Wagner, BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus.

Homepage / e-mail: www.thecityto come.de / wagner@math.tu-cottbus.de