Priv.-Doz. Dr. Marcus Wagner
Universität Leipzig, Mathematisches Institut
Kurs “Variationsrechnung” (FS 2012)

Variationsrechnung (4-std. Kurs im FS 2012) — Inhaltsübersicht

I. Einführung

1. Zum Gegenstand der Variationsrechnung
2. Beispiele
3. Grundaufgaben
4. Minimalstellen und Minimalwerte
5. Zur Geschichte der Variationsrechnung: “Klassische” versus “direkte” Methoden

II. Variationsgleichungen und Sobolevräume

1. Übersicht: Die verwendeten Funktionenräume
2. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung
3. Verallgemeinerte Ableitungen
4. Einige Eigenschaften der Räume $W_p^{1,n}$

III. Weierstraßsche Nadelvariationen

1. Die Weierstraß-Bedingung
2. Die Legendre-Bedingung als Folgerung aus der Weierstraß-Bedingung
3. Mehrdimensionale Fassung beider Bedingungen

IV. Differentialrechnung für Funktionale

1. Die erste Variation eines Funktionals
2. Differentialrechnung in Banachräumen
3. Anmerkungen zur Struktur der Zielfunktionale der Variationsrechnung

V. Untersuchung der 1. Variation

1. Die Euler-Lagrange-Gl.en für C^2-Lösungen von (P_1), (P_2)
2. Spezialfälle der Integration der ELG
3. Die ELG.en für C^2-Lösungen von (P_4), (P_5)
4. Die ELG in integrierter Form für PC^1-Lösungen von (P_1)
5. Eine hinreichende Bedingung

VI. Kanonische Formulierung der notwendigen Bedingungen

1. Transformation der Grundaufgabe (P_2) auf “kanonische Gestalt”
2. Das System der kanonischen Gleichungen
   A) Energieintegral
   B) Zyklische Koordinaten

C) Geometrie im Phasenraum

D) Kanonische Transformationen

E) Die Hamilton-Jacobi-pDGl.

3. Anmerkungen zur Transformation von (P_2) auf kanonische Gestalt

A) Interpretation mit Hilfe der Legendre-Transformation

B) Interpretation als Multiplikatorenregel

VII. Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

1. Eine allgemeine Multiplikatorenregel
2. Anwendung der Multiplikatorenregel auf (P_3)
3. Einige Spezialfälle

A) Grundaufgabe (P_2) mit unvollständigen Randbedingungen

B) Bolza-Aufgabe

C) Isoperimetrische Aufgabe

VIII. Existenzsätze

1. Der verallgemeinerte Satz von Weierstraß
2. Konvexität und Existenzsatz für eindimensionale Probleme
3. Quasikonvexität und Existenzsatz für mehrdimensionale Probleme

IX. Beispiele für direkte Methoden der Variationsrechnung

1. Variationsprobleme mit Energiefunktionalen
2. Äquivalenz von selbstadjungierten RWP's und Variationsproblemen (Q)
3. Äquivalenz von RWP's für elliptische DGl.en und Variationsproblemen (Q)
4. Das Ritzsche Verfahren zur Lösung von (Q)
5. Finite-Elemente-Methoden (FEM) zur Lösung von (Q)

X. Regularitätssätze

Seminarthemen:

1. Modellbildung in der Variationsrechnung
2. Beweismethoden der Variationsrechnung: Fundamentallemma und Verallgemeinerungen
3. Notwendige Bedingungen 1. Ordnung für die Grundaufgabe
4. Notwendige Bedingungen 1. Ordnung für die Grundaufgabe (II)
5. Notwendige Bedingungen für starke Minimalstellen
6. Die Multiplikatorenregel
7. Notwendige und hinreichende Bedingungen 2. Ordnung für die Grundaufgabe