PD Dr. Marcus Wagner
Universität Leipzig, Mathematisches Institut
Kurs “Variationsrechnung” (FS 2012)

Testatfragen zum Kurs “Variationsrechnung” (I)

1. Kennzeichne die abstrakte Grundaufgabe (P_0) der Variationsrechnung.
2. Nenne die Grundaufgaben (P_2) und (P_5) der klassischen Variationsrechnung.
3. Was versteht man unter dem Minimalwert der Aufgabe (P_0)?
4. Wann besitzt (P_0) eine Minimalfolge, und welche Eigenschaften hat diese?
5. Erkläre: starke und schwache lokale Minimalstelle.
6. Was versteht man unter “klassischen” und “direkten” Methoden der Variationsrechnung?
7. Welche Funktionen gehören zum Raum $PC^{1,n}[\,a\,,\,b\,]$?
8. Nenne das Fundamentallemma der Variationsrechnung in den Fassungen für $x \in C^0$ bzw. $x \in L^1$.
9. Nenne das Lemma von Du Bois-Reymond.
10. Wie ist die verallgemeinerte Ableitung $\dot{x}$ von $x \in L^p[\,a\,,\,b\,]$ erklärt?
11. Sei $\Omega = [\,a\,,\,b\,] \subset \mathbb{R}^1$ bzw. $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m > 1$. Unter welchen Voraussetzungen besitzen Funktionen $x \in W_p^1(\Omega)$ stetige Repräsentanten?
12. Warum benötigt man in den Aufgaben (P_1) und (P_4) Wachstumsbedingungen für den Integranden $r(t, \xi, v)$? Gib eine solche Bedingung an.
13. Wie lautet die Weierstraß-Bedingung für (P_1) und $n = 1$?
14. Definiere: erste Variation von F in $\hat{x}$ in Richtung $(x - \hat{x})$.
15. Wie lautet die erste Variation von $F(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_a^b r(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))\,dt$ in $\hat{\boldsymbol{x}}$ in Richtung $(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$?
16. Wie lautet die erste Variation von $B(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}(a), \boldsymbol{x}(b))$ in $\hat{\boldsymbol{x}}$ in Richtung $(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$?
17. Stelle die Definitionen von Gâteaux- und Fréchet-Ableitung $D_G\,F(\hat{x})(\,\cdot\,)$ bzw. $D_F\,F(\hat{x})(\,\cdot\,)$ gegenüber. Aus welchen Räumen kommen die beiden Ableitungen?
18. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Grundaufgabe (P_1) und $n = 1$ bzw. $n > 1$?
19. Was ist eine Extremale?
20. Unter welchen Bedingungen hat die DGl. $r(\,\hat{\ldots}\,) - \hat{x}^{\cdot}\, r_v(\,\hat{\ldots}\,) \equiv c$ dieselben Lösungen wie die ELG.?

PD Dr. Marcus Wagner
Universität Leipzig, Mathematisches Institut
Kurs "Variationsrechnung" (FS 2012)

Testatfragen zum Kurs "Variationsrechnung" (II)

21. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen in integrierter Form für die Grundaufgabe (P_1) und $n = 1$ bzw. $n > 1$? Welche Extremstellen werden erfaßt?
22. Formuliere die erste Erdmannsche Eckenbedingung.
23. Unter welchen Voraussetzungen ist das System der ELG.en als Optimalitätsbedingung notwendig und hinreichend?
24. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für die mehrdimensionale Grundaufgabe (P_4) und $n = 1$ bzw. $n > 1$? Welche Extremstellen werden erfaßt?
25. Beschreibe die Transformation der Grundaufgabe (P_2) auf kanonische Gestalt $(\mathrm{P}_2)^{**}(\hat{\boldsymbol{x}})$ (bezogen auf zulässiges $\hat{\boldsymbol{x}} \in C^{2,n}$).
26. Wie lautet das System der kanonischen Gleichungen für $(\mathrm{P}_2)^{**}$?
27. Welche Konsequenzen hat das Auftreten von zyklischen Koordinaten für das System der kanonischen Gleichungen?
28. Was versteht man unter dem Phasenfluß zu einer allgemeinen Lösung $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})$ des Systems der kanonischen Gleichungen?
29. Wie lautet die Hamilton-Jacobi-pDGl.?
30. Was ist eine isoperimetrische Nebenbedingung?
31. Für welche Aufgabe (P_0) gilt die allgemeine Multiplikatorenregel, und welche notwendige Bedingung enthält sie?
32. Was versteht man unter dem Eintreten des regulären Falles?
33. Wie lautet das Lagrangefunktional für die Aufgabe mit Nebenbedingungen?
34. Welche Transversalitätsbedingungen ergeben sich in der Grundaufgabe mit einseitigen Randbedingungen?
35. Formuliere den verallgemeinerten Satz von Weierstraß.
36. Was versteht man unter "Abschneiden" des zulässigen Bereiches?
37. Wann heißt ein Funktional F auf einem normierten Raum X koerzitiv?
38. Formuliere den Existenzsatz für (P_0) auf einem reflexiven Banachraum X.
39. Definiere: quasikonvexe Funktion $r(v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$.
40. Sei $r(v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, stetige Funktion. Unter welchen Bedingungen besitzt die folgende Aufgabe eine globale Minimalstelle?

$$(\mathrm{P})\colon \quad F(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega r \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial t_1 & \dots & \partial x_1/\partial t_m \\ \vdots & & \vdots \\ \partial x_n/\partial t_1 & \dots & \partial x_n/\partial t_m \end{pmatrix} dt = \inf\,!\,,\ \boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{C}{}^{0,n}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{1,n}(\Omega)$$

PD Dr. Marcus Wagner
Universität Leipzig, Mathematisches Institut
Kurs "Variationsrechnung" (FS 2012)

Testatfragen zum Kurs "Variationsrechnung" (III)

41. Sei $\hat{x} \in C^1$ in (P_2) zulässig. Welche Gestalt hat das akzessorische Variationsproblem?
42. Wie lautet die Jacobische Gleichung?
43. Nenne die Jacobi-Bedingung in differentieller Form.
44. Definiere zur Aufgabe (Q) das energetische Skalarprodukt und die energetische Norm.
45. Charakterisiere die Minimallösung von (Q) durch eine Variationsungleichung bzw. Variationsgleichung.
46. Erkläre: selbstadjungiertes Randwertproblem und zugeordnete Variationsaufgabe. Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden?
47. Erkläre: Randwertproblem für elliptischen Differentialoperator mit Divergenzstruktur und zugeordnete Variationsaufgabe. Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden?
48. Nenne die Schritte des Ritzschen Verfahrens.
49. Wie lautet das Ritzsche Gleichungssystem?
50. Warum ist das Ritzsche Gleichungssystem stets eindeutig lösbar?
51. Was besagt das Lemma von Céa?
52. Gib eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Ritzschen Verfahrens an.
53. Was ist eine reguläre Triangulation für ein polygonales Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$?
54. Beschreibe die Unterräume X_n, die zur FEM mit Courantschen Dreiecken gehören.
55. Skizziere für die FEM mit Courantschen Dreiecken die Basisfunktionen und die projizierten Basisfunktionen.
56. Gib Bedingungen für die Konvergenz der FEM mit Courantschen Dreiecken an.
57. Erkläre: Referenzelement und Formfunktionen.
58. Wann ist eine C^2-Lösung der ELG. in (P_1) sogar beliebig oft differenzierbar?
59. Nenne die Voraussetzungen des Regularitätssatzes für (P_1), $n = 1$.
60. Warum erfüllt eine Funktion $x \in W_1^1[\,a\,,\,b\,]$ mit $|\,\dot{x}(t)\,| \leqslant L \;\; (\forall)\, t \in [\,a\,,\,b\,]$ eine Lipschitzbedingung?