

# Der Riemannsche Umordnungssatz für bedingt konvergente Reihen

Franka Schorten

---

## 1 Definitionen

### 1.1 Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heisst konvergent, wenn die Folge der Partialsummen  $s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$  konvergiert.

### 1.2 Divergenz

Eine Reihe, die nicht konvergiert, wird divergent genannt.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$  bedeutet, dass die Folge der Partialsummen bestimmt divergiert.

### 1.3 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert dann absolut, wenn die Folge ihrer Absolutteilsummen  $x_n := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$  beschränkt ist, d.h.  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

### 1.4 Unbedingte Konvergenz

Sei  $n : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  eine bijektive Abbildung (Permutation) mit  $k \mapsto n(k)$ , dann heißt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$  eine Umordnung der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$  heißt unbedingt konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen wieder konvergiert, und zwar wieder gegen  $s$ , so dass gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$ .

### 1.5 Bedingte Konvergenz

Eine konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$  heißt bedingt konvergent, wenn es eine Umordnung gibt, so dass die umgeordnete Reihe gegen  $b \neq s$  oder überhaupt nicht konvergiert.

## 2 Satz: Absolute Konvergenz ist äquivalent zu unbedingter Konvergenz.

**Satz 2.1** *Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch unbedingt konvergent.*

**Beweis:**

Wir nehmen an die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiere absolut,  $s$  sei ihre Summe und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$  eine ihrer Umordnungen. Ferner seien

$$s_m := a_0 + a_1 + \dots + a_m \quad (1)$$

$$\tilde{s}_m := a_{n_0} + a_{n_1} + \dots + a_{n_m} \quad (2)$$

die Teilsummen der jeweiligen Reihen. Da  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert, existiert gemäss dem Cauchy Kriterium für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $K$ , so dass  $\forall p \in \mathbf{N}$  gilt:

$$|a_{K+1}| + |a_{K+2}| + \dots + |a_{K+p}| < \varepsilon. \quad (3)$$

Zu diesem  $K$  bestimmen wir ein  $k_0$  so, dass  $\{0, 1, \dots, K\} \subseteq \{n_0, n_1, \dots, n_{k_0}\}$  ist. Für  $m > k_0$  treten die Glieder  $a_0, \dots, a_K$  sowohl in  $s_m$  als auch in der Summe  $\tilde{s}_m$  auf und kommen demzufolge in der Differenz  $s_m - \tilde{s}_m$  nicht mehr vor, die somit folgende Form hat:  $s_m - \tilde{s}_m = v_{K+1}a_{K+1} + v_{K+2}a_{K+2} + \dots + v_{K+p}a_{K+p}$  mit  $v_j \in \{-1, 0, 1\}$ . Folglich ist

$$|s_m - \tilde{s}_m| \leq |a_{K+1}| + |a_{K+2}| + \dots + |a_{K+p}| < \varepsilon,$$

was laut Cauchy Kriterium gilt, und daher ist  $(s_m - \tilde{s}_m)$  eine Nullfolge. Da die Summe  $s_m \rightarrow s$  strebt, ergibt sich nun  $\tilde{s}_m = (\tilde{s}_m - s_m) + s_m \rightarrow s$ , also

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}.$$

Um die Äquivalenz zwischen absoluter und unbedingter Konvergenz zu beweisen, muss selbstverständlich auch die Umkehrung des gerade bewiesenen Satzes gelten. Der nun folgende nach Bernhard Riemann (1826-1866) benannte Satz präzisiert sogar die Umkehrung des vorherigen Satzes.

### Satz 2.2 (Riemannscher Umordnungssatz)

*Ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  bedingt konvergent, so findet man zu jeder beliebigen Zahl  $s \in \mathbf{R}$  eine Umordnung  $n: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  der Glieder mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)} = s$ .*

**Beweis:**

Nun nehmen wir an, die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  sei konvergent, jedoch konvergiere sie nicht absolut. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir dabei annehmen, dass alle  $a_k \neq 0$  sind und setzen nun

$$a_k^+ := \frac{|a_k| + a_k}{2} = \max(a_k, 0) \quad (4)$$

$$a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2} = \max(-a_k, 0). \quad (5)$$

Es ist ersichtlich, dass die Zahlen  $a_k^+, a_k^-$  alle nichtnegativ sind, und demzufolge ist für jedes  $k$

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \quad \text{und} \quad (6)$$

$$|a_k| = a_k^+ + a_k^-. \quad (7)$$

Wäre eine der beiden Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$  konvergent, so würde aus (6) hervorgehen, dass auch die andere konvergiert. Dann würde aus der Gleichung (7) folgen, dass auch  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert, was jedoch

ein Widerspruch zu unserer Annahme ist und demzufolge divergieren die Reihen  $\sum a_k^+$  und  $\sum a_k^-$ .

Es seien nun

$\{+p_k\} :=$  Teilfolge aller positiven Glieder von  $\{a_k\}$  (entsteht durch Streichung der Nullen in  $\{a_k^+\}$ ) und  
 $\{-q_k\} :=$  Teilfolge aller negativen Glieder von  $\{a_k\}$  (entsteht durch Streichung der Nullen in  $\{a_k^-\}$ ).

Da voraussetzungsgemäß alle  $a_k \neq 0$  sind, tritt jedes Glied der Folge  $\{a_k\}$  nur in einer der Teilfolgen  $\{p_k\}$  und  $\{-q_k\}$  auf. Natürlich sind auch die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$  divergent und infolgedessen gilt:

$$\begin{aligned} \text{es existiert ein kleinster Index } n_0 \text{ mit } & \sum_{k=0}^{n_0} p_k > s, \\ \text{dann ein kleinster Index } n_1 \text{ mit } & \sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) < s \\ \text{und wieder ein kleinster Index } n_2 \text{ mit } & \sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} p_k > s \\ & \vdots \end{aligned}$$

Die so entstandene Reihe

$$p_0 + \cdots + p_{n_0} + (-q_0) + \cdots + (-q_{n_1}) + p_{n_0+1} + \cdots + p_{n_2} + \cdots \quad (8)$$

ist offensichtlich eine Umordnung der Ausgangsreihe und wird mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$  bezeichnet. Mit Hilfe der Minimaleigenschaft der Indizes  $n_0, n_1, n_2, \dots$  kann man die Differenz zwischen  $s$  und den Teilsummen betragsmäßig durch  $p_{n_0}, q_{n_1}, p_{n_2}, \dots$  nach oben abschätzen.

$$\begin{aligned} |s - [p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_0}]| &\leq p_{n_0} \\ |s - [p_0 + \cdots + p_{n_0} + (-q_0) + \cdots + (-q_{n_1})]| &\leq q_{n_1} \\ |s - [p_0 + \cdots + p_{n_0} + (-q_0) + \cdots + (-q_{n_1}) + p_{n_0+1} + \cdots + p_{n_2}]| &\leq p_{n_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da aber die Folgen  $(q_{n_1}, q_{n_3}, \dots)$  und  $(p_{n_0}, p_{n_2}, \dots)$  aufgrund der notwendigen Bedingung für die Konvergenz von  $\sum a_k$  gegen Null streben, erhalten wir daraus, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$  gegen  $s$  konvergiert und damit gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)} = s. \quad (9)$$

**Satz 2.3** Eine bedingt konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$  kann so umgeordnet werden, dass die neu entstandene Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$  bestimmt gegen  $\pm\infty$  divergiert.

**Beweis:**

Diejenigen Glieder der bedingt konvergenten Reihe  $\sum a_k$ , die nicht negativ sind, sollen in der Reihenfolge, wie sie in  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  auftreten, mit  $p_1, p_2, p_3, \dots$  bezeichnet werden; diejenigen, die negativ sind, mit  $-q_1, -q_2, -q_3, \dots$ . Dann sind  $\sum p_k, \sum q_k$  Reihen mit positiven Gliedern, wobei beide divergieren müssen, was nach Gleichung (7) des vorigen Satzes folgt.

Die Umordnung der Reihe  $\sum a_k$  erfolgt so, dass auf eine Gruppe positiver Glieder ein negatives Glied folgt und hat die Form

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} - q_1 + p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \cdots + p_{m_2} - q_2 + p_{m_2+1} + \cdots \quad (10)$$

Diese Umordnung der Ausgangsreihe wird mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$  bezeichnet. Da die Reihe  $\sum p_k$  divergiert und ihre Teilsummen also nicht beschränkt sind, können wir zunächst einen Index

$m_1$  so groß wählen, dass

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} > 1 + q_1,$$

dann  $m_2$  so, dass

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} + \cdots + p_{m_2} > 2 + q_1 + q_2$$

und allgemein  $m_\nu > m_{\nu-1}$  so wählen, dass

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_\nu} > \nu + q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Daher gilt die Ungleichung

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} - q_1 + p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2} - q_2 + \cdots + p_{m_\nu} - q_\nu > \nu. \quad (11)$$

Da  $\nu$  jede natürliche Zahl sein darf, folgt aus (11), dass die Teilsummen von  $\sum a_{n(k)}$  nicht beschränkt sind, und damit gilt die Behauptung.

### 3 Die Anwendung des Riemannschen Umordnungssatzes auf die Leibnizreihe

Im folgenden widmen wir uns der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Zuerst beweisen wir, dass die Summe der Leibnizreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$  beträgt, und dann wenden wir den Riemannschen Umordnungssatz auf diese Reihe an. Die Reihe soll so umgeordnet werden, dass sich als Grenzwert  $S_n = \ln(n)$  mit  $n \in \mathbf{N}$  bzw.  $S_r = r \ln(2)$  mit  $r \in \mathbf{R}$  ergibt. Um uns die Suche nach dieser Umordnung zu erleichtern, muss zunächst folgender Satz bewiesen werden.

**Satz 3.1 (Schlömilch)** Die Funktion  $f$  mit  $f(x) > 0 \forall x \in [0, \infty)$  sei monoton fallend mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = A$ . Wenn in der konvergierenden Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f(k) = s$  mit  $k \in \mathbf{N}_0$ , die Glieder so umgeordnet werden, dass immer auf  $p$  positive  $q$  negative Glieder folgen, so ist die Summe der umgeordneten Reihe

$$S = s + \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right). \quad (12)$$

**Beweis:**

Zum Beweis nehmen wir nun die Voraussetzungen des Satzes an. Sei  $f$  mit  $f(x) > 0 \forall x \in [0, \infty)$  eine monoton fallende Funktion und sei  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , so konvergiert die alternierende Reihe  $f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \dots$  nach dem Leibnizkriterium. Wir setzen nun  $f(k) := a_k \forall k \in \mathbf{N}_0$  und unsere Reihe lautet nun

$$\begin{aligned} s_{2m} &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2m-2} - a_{2m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k a_k \\ \text{mit } \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} &= s. \end{aligned} \quad (13)$$

Dagegen sei  $S_{(p+q)n}$  Teilsumme einer Reihe, die durch folgende Umordnung aus der ursprünglichen Reihe

hervorgeht: Man lässt immer auf  $p$  positive  $q$  negative Glieder mit  $p > q$  folgen.

$$\begin{aligned}
S_{(p+q)n} &= \begin{array}{cccccc}
a_0 & +a_2 & +a_4 & +\cdots & +a_{2p-2} \\
-a_1 & -a_3 & -a_5 & -\cdots & -a_{2q-1} \\
+a_{2p} & +a_{2p+2} & +a_{2p+4} & +\cdots & +a_{4p-2} \\
-a_{2q+1} & -a_{2q+3} & -a_{2q+5} & -\cdots & -a_{4q-1} \\
& & \vdots & & \\
& +a_{2nq-4} & +a_{2nq-2} & +a_{2nq} & \cdots \\
& & \vdots & & \\
+a_{(2n-2)p} & +a_{(2n-2)p+2} & +a_{(2n-2)p+4} & +\cdots & +a_{2np-2} \\
-a_{(2n-2)q+1} & -a_{(2n-2)q+3} & -a_{(2n-2)q+5} & -\cdots & -a_{2nq-1}
\end{array} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_{(p+q)n} &= S
\end{aligned}$$

Setzen wir  $m = nq$ , so ist  $s_{2m} = s_{2nq} = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2nq-2} - a_{2nq-1}$ , und wegen  $p > q$  enthält diese Reihe alle in  $S_{(p+q)n}$  vorkommenden negativen Glieder. Daher ist

$$S_{(p+q)n} - s_{2nq} = a_{2nq} + a_{2nq+2} + \cdots + a_{2np-2},$$

wobei die Summe  $n(p - q)$  Glieder enthält.

Weiterhin gilt folgende Ungleichung, welche aus der vorausgesetzten Monotonie von  $f$  folgt.

### Hilfssatz 3.2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_c^{c+rh} f(x) dx &\leq f(c) + f(c+h) + f(c+2h) + \cdots + f(c+[r-1]h) \\
&\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+rh} f(x) dx + f(c) - f(c+rh) \\
&\text{mit } r \in \mathbf{N}; h, c \in \mathbf{R}, c \geq 0, h > 0
\end{aligned} \tag{14}$$

1. Teil der Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \left[ \int_c^{c+h} f(x) dx + \int_{c+h}^{c+2h} f(x) dx + \cdots + \int_{c+(r-1)h}^{c+rh} f(x) dx \right] \\
&\leq \frac{1}{h} \left[ \int_c^{c+h} f(c) dx + \int_{c+h}^{c+2h} f(c+h) dx + \cdots + \int_{c+(r-1)h}^{c+rh} f(c+[r-1]h) dx \right] \\
&= 1/h [f(c)h + f(c+h)h + \cdots + f(c+[r-1]h)h] \\
&= f(c) + f(c+h) + f(c+2h) + \cdots + f(c+[r-1]h)
\end{aligned}$$

2. Teil der Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \left[ \int_c^{c+h} f(x) dx + \int_{c+h}^{c+2h} f(x) dx + \cdots + \int_{c+(r-1)h}^{c+rh} f(x) dx \right] + f(c) - f(c+rh) \\
&\geq \frac{1}{h} \left[ \int_c^{c+h} f(c+h) dx + \int_{c+h}^{c+2h} f(c+2h) dx + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \int_{c+(r-1)h}^{c+rh} f(c+rh) dx \right] + f(c) - f(c+rh) \\
&= \frac{1}{h} [f(c+h)h + f(c+2h)h + \cdots + f(c+rh)h] + f(c) - f(c+rh)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(c+h) + f(c+2h) + \cdots + f(c+rh) + f(c) - f(c+rh) \\
&\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+rh} f(x) dx + f(c) - f(c+rh)
\end{aligned}$$

Wenden wir die Ungleichung (14) auf unsere Funktion  $f$  an und setzen  $f(k) = a_k$ ,  $r = (p-q)n$ ,  $h = 2$ ,  $c = 2nq$ ,  $c+rh = 2nq + (p-q)2n = 2np$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{2nq}^{2np} f(x) dx &\leq f(2nq) + f(2nq+2) + \cdots + f(2np-2) \\
&= a_{2nq} + a_{2nq+2} + \cdots + a_{2np-2} \\
&= S_{(p+q)n} - s_{2qn} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{2nq}^{2np} f(x) dx + a_{2nq} - a_{2np}.
\end{aligned}$$

Nach Anwendung der Substitutionsregel mit  $x = ny$  ergibt sich

$$\frac{1}{2} \int_{2q}^{2p} f(ny) n \frac{y}{y} dy \leq S_{(p+q)n} - s_{2qn} \leq \frac{1}{2} \int_{2q}^{2p} f(ny) n \frac{y}{y} dy + a_{2nq} - a_{2np}.$$

### Hilfssatz 3.3 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Die Funktionen  $h, g$  seien auf  $(a, b)$   $R$ -integrierbar und es sei  $g \geq 0$  oder  $g \leq 0$ , so  $\exists \mu$  mit  $\inf h \leq h(\mu) \leq \sup h$ :

$$\int_a^b hg dx = h(\mu) \int_a^b g dx \quad [1, \text{S. 477}] \quad (15)$$

Aus (15) folgt mit  $h(y) = ny f(ny)$ ,  $g(y) = \frac{1}{y}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} n\mu f(n\mu) \int_{2q}^{2p} \frac{1}{y} dy &= \frac{1}{2} n\mu f(n\mu) \ln\left(\frac{p}{q}\right) \\
&< S_{(p+q)n} - s_{2nq} < \frac{1}{2} n\mu f(n\mu) \ln\left(\frac{p}{q}\right) + a_{2nq} - a_{2np}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Da die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergiert, gilt aufgrund des Konvergenzkriteriums, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2nq} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2np} = 0$ . Falls nun  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu \cdot f(n\mu) = A$  existiert, so folgt daraus

$$S_{(p+q)n} - s_{2nq} = S - s = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) \ln\left(\frac{p}{q}\right) \text{ mit } n\mu \cdot f(n\mu) = x \cdot f(x). \quad (17)$$

Zu dem gleichen Resultat im Falle  $p < q$  gelangen wir, wenn wir die Differenz  $s_{2nq} - S_{(p+q)n}$  bilden und anschließend analog zu dem vorherigen verfahren, womit der Satz von Schlömilch bewiesen ist.

Nun wenden wir uns wieder der ursprünglichen Aufgabe zu und zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2), \quad (18)$$

was mittels Taylorreihenentwicklung der Funktion  $f(x) = \ln(1+x)$  erfolgt. Die Funktion  $f$  ist auf  $(-1, \infty)$  beliebig oft differenzierbar und die ersten  $n$  Ableitungen lauten

$$f(x) = \ln(x_0 + 1)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1+x_0)} \\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x_0)^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x_0)^3} \\
&\vdots \\
f^n(x) &= -1^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n}.
\end{aligned}$$

Für  $x > -1$  und beliebiges  $n \in \mathbf{N}$  gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \ln(1+x_0) + \frac{1}{(1+x_0)} \frac{(x-x_0)}{1!} + \frac{-1}{(1+x_0)^2} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots \\
&- 1^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} \frac{(x-x_0)^n}{n!} + (-1)^n \frac{(n)!}{(1+x_0)^{n+1}} \frac{\vartheta(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

wobei  $\vartheta$  eine Zahl zwischen 0 und 1 ist. Als Entwicklungsstelle wählen wir  $x_0 = 0$  und erhalten

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
&+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Um die Funktion als Taylorreihe darstellen zu können, muß überprüft werden, für welche Werte von  $x$  die Folge der Restglieder  $R_n(x)$  gegen 0 strebt. Für  $0 < x \leq 1$  ist

$$|R_n(x)| = |(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (19)$$

Demzufolge ist für diese  $x$   $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  und somit gilt:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \text{für } 0 < x \leq 1. \quad (20)$$

Setzen wir  $x = 1$ , so erhalten wir aus (20) unsere Behauptung  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) = s$ .

Nun suchen wir Umordnungen der Leibnizreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} f(k)$  mit  $f(k) = \frac{1}{k}$ , die als Reihensumme zum einen  $S_n = \ln(n)$  mit  $n \in \mathbf{N}$  und zum anderen  $S_r = r \ln(2)$  mit  $r \in \mathbf{Z}$  ergeben. Da die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  monoton fallend ist und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = 1$ , lässt sich der Satz von Schlömilch auf diese Reihe anwenden, sofern voraussetzungsgemäß die Umordnung so erfolgt, dass auf  $p$  positive Glieder stets  $q$  negative folgen, womit dann gilt:  $S = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln(2) + \ln\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$ . Wir beginnen mit  $S_n = \ln(n)$  und erhalten

$$\begin{aligned}
\ln(n) &= \ln(2) + \ln(n) - \ln(2) \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{n}{2}\right).
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist hier der Satz von Schlömilch anwendbar, und aus  $\ln\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$  ergibt sich das Verhältnis der Zahlen aufeinanderfolgender positiver und negativer Glieder mit  $\frac{p}{q} = \frac{n^2}{4}$ .

Für  $S_r = r \ln(2)$  erfolgt dies analog:

$$\begin{aligned} r \ln(2) &= \ln(2^r) = \ln(2^{r-1} \cdot 2) \\ &= \ln(2) + \ln(2^{r-1}) \\ &= \ln(2) + \ln\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right) \end{aligned}$$

Aus  $\sqrt{\frac{p}{q}} = 2^{r-1}$  ergibt sich folgendes Verhältnis von  $p$  und  $q$  in der umgeordneten Reihe:  $\frac{p}{q} = \frac{2^{2r}}{4}$ .

Aus dem Satz von Schlömilch geht ebenfalls hervor, dass man Umordnungen jeder beliebigen Reihe erzeugen kann — sofern sie den Voraussetzungen des Satzes entspricht — für welche die neue Reihe gegen den gleichen Grenzwert konvergiert wie die ursprüngliche Reihe. Dies ist dann der Fall, wenn auf  $p$  positive auch  $p$  negative Glieder folgen, denn  $\ln(\frac{p}{q}) = \ln(1) = 0$  für  $p = q$ , und daraus folgt  $S = s$ .

### Zusammenfassung

Behält man die Reihenfolge der positiven und der negativen Glieder, wie sie in einer bedingt konvergenten Reihe auftreten, bei, so kann man durch Umordnung jeden beliebigen Grenzwert erzeugen oder die neue Reihe sogar divergieren lassen. Ergänzend zum Riemannschen Umordnungssatz, welcher nur die Möglichkeit einräumt, durch Umordnung bestimmte Grenzwerte zu erzeugen, liefert der Satz von Schlömilch unter bestimmten Voraussetzungen sogar die Anordnung der Glieder in der umgeordneten Reihe. Die Frage, was geschieht, wenn man die Reihenfolge der positiven und negativen Glieder der Reihe bei der Umordnung nicht beibehält, bleibt noch offen.

## Literatur

- [1] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*.  
Teubner; Stuttgart 1994, 187 – 202, 358 – 361
- [2] Knopp, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*.  
Springer; Berlin - Heidelberg - New York 1964, 137 – 151
- [3] Schlömilch, O.: *Ueber bedingt-convergirende Reihen*.  
*Zeitschr. f. Math. u. Physik* **18** (1873), 520 – 522