

**Verschiedene Interpretationen des Ziel-
funktional in einem Steuerungsproblem
mit unendlichem Zeithorizont**

Valeriya Lykina, Sabine Pickenhain
und Marcus Wagner

Reihe Mathematik
M-06/2007

Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Fakultät 1, Mathematisches Institut
Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus

Verschiedene Interpretationen des Zielfunktional in einem Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont

Valeriya Lykina, Sabine Pickenhain und Marcus Wagner

1. Ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont und seine Eigenschaften.

a) Einleitung.

Im Kontext ökonomischer, aber auch naturwissenschaftlicher Fragestellungen¹⁾ werden Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont schon seit den 70er Jahren untersucht. Dennoch wurde die Notwendigkeit, die verschiedenen Interpretationen eines Zielfunktional der Gestalt

$$F(x, u) = \int_0^{\infty} f(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \sup ! \quad (1)$$

als Lebesgue- bzw. Riemann-Integral systematisch zu unterscheiden, erst in unmittelbarer Vergangenheit durch die Verfasser herausgestellt.²⁾ In der Mehrzahl der Veröffentlichungen und selbst in den Lehrbüchern [FEICHTINGER/HARTL 86]³⁾ und [CARLSON/HAURIE/LEIZAROWITZ 91]⁴⁾ unterbleibt eine Präzisierung des verwendeten Integralbegriffs.

Beim Beweis von Existenzsätzen werden durchgehend Voraussetzungen formuliert, welche die Konvergenz des uneigentlichen Integrals als Lebesgue-Integral erzwingen;⁵⁾ bei der Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen wird jedoch gewöhnlich vom Grenzübergang $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt$ Gebrauch

¹⁾ Siehe die Einführungen in [FEICHTINGER/HARTL 86], pp. 5 – 15, und [CARLSON/HAURIE/LEIZAROWITZ 91], pp. vii – ix; als Beispiele für Einzeluntersuchungen in Ökonomie, Biologie und Physik seien [MAGILL 82], [GOH/LEITMANN/VINCENT 74] und [ZASLAVSKI 95] genannt.

²⁾ [PICKENHAIN/LYKINA 06], p. 220; [PICKENHAIN/LYKINA/WAGNER 06], pp. 14 ff.

³⁾ Ebenda, p. 39: “setzen wir voraus, daß das uneigentliche Integral ... für jede zulässige Lösung konvergiert.” In welchem Sinne?

⁴⁾ Beispielsweise wird ebenda, p. 10, Definition 1.2 (i), ein zulässiger Prozeß (\hat{x}, \hat{u}) “strongly optimal” genannt, falls die Bedingung

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = \int_0^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt < \infty \quad (2)$$

für alle anderen zulässigen Prozesse (x, u) erfüllt ist. Die Bedingung (2) impliziert, daß $\int_0^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt$ als (mindestens bedingt) konvergentes uneigentliches Riemann-Integral aufzufassen ist, während für die zum Vergleich stehenden zulässigen Prozesse (x, u) die uneigentlichen Riemann-Integrale $\int_0^{\infty} f(t, x(t), u(t)) dt$ konvergieren, bestimmt (mit Wert $(-\infty)$) oder sogar unbestimmt divergieren können. Bei der Formulierung des zugehörigen Existenzsatzes wird jedoch der zulässige Bereich auf Prozesse (x, u) eingeschränkt, für die $\int_0^{\infty} f(t, x(t), u(t)) dt$ als Lebesgue-Integral konvergiert (p. 187, Theorem 7.17, Voraussetzung (iii)).

⁵⁾ [BAUM 76], p. 99, Theorem 6.1., und [CARLSON/HAURIE/LEIZAROWITZ 91], p. 187, Theorem 7.17, setzen voraus, daß $f(t, x(t), u(t))$ für beliebige zulässige Prozesse (x, u) durch eine Lebesgue-integrierte Funktion majorisiert werden kann, während [BALDER 83], p. 204, Theorem 3.6., (3.21), und [DMITRUK/KUZ’KINA 05], p. 468, Assumption A8, und p. 469, Theorem 1, gleichmäßige Integrierbarkeitsbedingungen formulieren.

gemacht,⁶⁾ womit $\int_0^\infty f(t, x(t), u(t)) dt$ wiederum als Riemann-Integral zu interpretieren ist.⁷⁾ Den von v. WEIZSÄCKER, GALE und HALKIN vorgeschlagenen verallgemeinerten Optimalitätsbegriffen⁸⁾ liegt ebenfalls eine Riemannsche Interpretation des Zielfunktional zugrunde.

Die Frage, welcher Integralbegriff aus der Sicht der jeweiligen ökonomischen oder naturwissenschaftlichen Anwendungen vorzuziehen ist, muß an dieser Stelle offengelassen werden. Mit Sicherheit ergibt sich jedoch aus der Inkonsistenz der Lebesgueschen und Riemannschen Integralbegriffe für einen unbeschränkten Integrationsbereich⁹⁾ die Notwendigkeit, bei der mathematischen Formulierung der Aufgaben den verwendeten Integralbegriff zu präzisieren.

Diese Notwendigkeit wird auch durch die vorliegende Arbeit belegt. Diese liefert erstmals ein Beispiel einer konvexen Aufgabe mit unendlichem Zeithorizont und linearem Zielfunktional, worin die Interpretationen des uneigentlichen Integrals als Lebesgue- oder Riemann-Integral zu verschiedenen endlichen Optimalwerten führen.¹⁰⁾ Wir weisen außerdem für beide Interpretationen die Existenz globaler Maximallösungen nach.

b) Formulierung der Aufgabe.

Sei $\Omega = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und $1 < p < \infty$. Wir betrachten das "unvollständig formulierte" phasenbeschränkte Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont:

$$(P)_\infty: F_\infty(x, y, u) = \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \longrightarrow \sup!; \quad (3.1)$$

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (\forall) t \in \Omega; \quad (3.2)$$

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad (\forall) t \in \Omega; \quad (3.3)$$

$$x(0) = 2; \quad (3.4)$$

$$0 \leq x(t) \leq g_1(t) \quad \forall t \in \Omega; \quad (3.5)$$

$$g_2(t) \cdot x(t) + g_3(t) \leq y(t) \leq 0 \quad \forall t \in \Omega; \quad (3.6)$$

$$0 \leq u(t) \leq 5 \quad (\forall) t \in \Omega \quad (3.7)$$

mit den stetigen Funktionen $g_1(t), g_2(t), g_3(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$g_1(t) = \begin{cases} 2-t & | 0 \leq t \leq 1, \\ 1/t & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad g_2(t) = \begin{cases} -t & | 0 \leq t \leq 1, \\ -1/t & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad g_3(t) = \begin{cases} 4(t-1) & | 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & | 1 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Zur exakten Formulierung von $(P)_\infty$ muß noch präzisiert werden, in welchem Sinne das Integral (3.1) zu verstehen ist.

⁶⁾ Siehe z. B. [CARLSON/HAURIE/LEIZAROWITZ 91], p. 24 f., Theorem 2.3., und [FEICHTINGER/HARTL 86], p. 187 f., Satz 7.5.

⁷⁾ [BLOT/MICHEL 96], p. 341, [BLOT/HAYEK 96], p. 979, und [BLOT/HAYEK 00], p. 280, gehören zu den wenigen Arbeiten, in denen die Riemannsche Interpretation explizit benannt wird.

⁸⁾ [GALE 67], [HALKIN 74], p. 269, und [v. WEIZSÄCKER 65], p. 85; zusammengefaßt bei [FEICHTINGER/HARTL 86], p. 186, Definition 7.2. HALKIN präzisiert loc. cit., p. 271: "In the formulation ... we do not require that either $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{x}(T)$ or $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T L(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) dt$ exist."

⁹⁾ [ELSTRODT 96], p. 151 f., Satz 6.3.

¹⁰⁾ In [PICKENHAIN/LYKINA/WAGNER 06], p. 14 f., Example 3.5., existiert keine zulässige Lösung, für die das Zielfunktional als Lebesgue-Integral konvergiert; ebenda, p. 15 f., Example 3.6., ist der Optimalwert bei der Interpretation des Zielfunktional als Riemann-Integral unendlich.

Definition 1.1.: Wir bezeichnen mit \mathcal{B}_∞ die Menge aller $(x, y, u) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \times W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \times L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, die (3.2) – (3.7) erfüllen, mit $\mathcal{B}_{\infty,L}$ die Menge aller $(x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty$, für die das Integral

$$F_{\infty,L}(x, y, u) = L \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \quad (5)$$

als Lebesgue-Integral existiert, und mit $\mathcal{B}_{\infty,R}$ die Menge aller $(x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty$, für die das Integral

$$F_{\infty,R}(x, y, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sin t \cdot x(t) dt = R \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \quad (6)$$

als uneigentliches Riemann-Integral konvergiert.

Damit entstehen aus $(P)_\infty$ zwei nunmehr präzise formulierte Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeit-
horizont:

$$(P)_{\infty,L}: F_{\infty,L}(x, y, u) = L \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \longrightarrow \text{sup!}; (x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}_{\infty,L} \text{ sowie}$$

$$(P)_{\infty,R}: F_{\infty,R}(x, y, u) = R \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \longrightarrow \text{sup!}; (x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}_{\infty,R}.$$

In beiden Aufgaben sind zulässiger Bereich und Zielfunktional konvex (siehe Lemma 2.1.).

c) Hauptergebnisse der Arbeit.

Über die Aufgaben $(P)_{\infty,L}$ und $(P)_{\infty,R}$ gilt folgender Satz:

Satz 1.2.: 1) Für die Maximalwerte μ_L und μ_R der Aufgaben $(P)_{\infty,L}$ und $(P)_{\infty,R}$ gilt

$$0 < \mu_L < \mu_R < \infty. \quad (7)$$

Die beiden unterschiedlichen Interpretationen des Zielfunktionals in $(P)_\infty$ führen also zu zwei verschiedenen, aber endlichen Maximalwerten.

2) Die Aufgabe $(P)_{\infty,L}$ besitzt eine globale Maximallösung (x_L, y_L, u_L) .

3) Die Aufgabe $(P)_{\infty,R}$ besitzt eine globale Maximallösung (x_R, y_R, u_R) .

4) Keine globale Maximallösung von $(P)_{\infty,L}$ kann eine solche von $(P)_{\infty,R}$ sein und umgekehrt.

In Kapitel 3 werden wir außerdem je eine globale Maximalstelle (x_L, y_L, u_L) und (x_R, y_R, u_R) von $(P)_{\infty,L}$ bzw. $(P)_{\infty,R}$ bestimmen.

d) Zugehörige Steuerungsprobleme $(P)_T$ mit endlichem Horizont.

Beim Versuch, $(P)_{\infty,L}$ oder $(P)_{\infty,R}$ durch Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ zu “approximieren”, entstehen mit $T > 0$ die Aufgaben

$$(P)_T: F_T(x, y, u) = \int_0^T \sin t \cdot x(t) dt \longrightarrow \text{sup!}; \quad (8.1)$$

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (8.2)$$

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad (\forall) t \in [0, T]; \quad (8.3)$$

$$x(0) = 2; \quad (8.4)$$

$$0 \leq x(t) \leq g_1(t) \quad \forall t \in [0, T]; \quad (8.5)$$

$$g_2(t) \cdot x(t) + g_3(t) \leq y(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad (8.6)$$

$$0 \leq u(t) \leq 5 \quad (\forall) t \in [0, T]. \quad (8.7)$$

Die stetigen Funktionen $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ werden wie oben durch (4) definiert (für $T \leq 1$ entfällt in den Definitionen jeweils die zweite Alternative). Über die Aufgaben $(P)_T$ gilt folgender Satz:

Satz 1.3.: Sei $1 < p < \infty$ und $1 < T < \infty$ beliebig.

1) Für die Maximalwerte μ_L und μ_T der Aufgaben $(P)_{\infty,L}$ und $(P)_T$ gilt

$$0 < \mu_L < \mu_T < \infty. \quad (9)$$

2) Die Aufgabe $(P)_T$ besitzt mindestens eine globale Maximallösung $(x_T, y_T, u_T) \in W^{1,p}[0, T] \times W^{1,p}[0, T] \times L^\infty[0, T]$.

3) Keine globale Maximallösung (x_T, y_T, u_T) von $(P)_T$ kann zu einer zulässigen Lösung $(\tilde{x}_T, \tilde{y}_T, \tilde{u}_T) \in \mathcal{B}_{\infty,L}$ von $(P)_{\infty,L}$ fortgesetzt werden.

e) Gliederung und Notation.

In Kapitel 2 beweisen wir zuerst die Aussage über die Maximalwerte, danach die Existenz globaler Maximallösungen in den Aufgaben $(P)_{\infty,L}$ und $(P)_{\infty,R}$. Anschließend wird das Ersatzproblem $(P)_T$ mit endlichem Horizont untersucht. In Kapitel 3 bestimmen wir jeweils eine globale Maximalstelle für $(P)_{\infty,L}$ und $(P)_{\infty,R}$, und zwar ohne Verwendung des Pontrjaginschen Maximumprinzips.

Die Sigla $C^k(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ bezeichnen die Räume der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen stetig auf $\partial\Omega$ fortgesetzt werden können, der (Äquivalenzklassen von) Funktionen, die auf Ω in p -ter Potenz Lebesgue-integrierbar ($1 \leq p < \infty$) oder meßbar und wesentlich beschränkt sind ($p = \infty$) bzw. Sobolevfunktionen sind, die zusammen mit ihren ersten verallgemeinerten Ableitungen zu $L^p(\Omega)$ gehören. Die Räume $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ und $L_{loc}^p(\Omega)$ bestehen aus denjenigen Funktionen f , deren Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ auf ein beliebiges kompaktes Teilintervall $[a, b] \subset \Omega$ zu $W^{1,p}[a, b]$ bzw. $L^p[a, b]$ gehören. Bei Integralen über unendliche Integrationsintervalle unterscheiden wir das Lebesgue-Integral $L\text{-}\int_a^\infty f(t) dt$ und das uneigentliche Riemann-Integral $R\text{-}\int_a^\infty f(t) dt$ schon in den Bezeichnungen. $f|_A$ bezeichnet die Einschränkung von f auf A ; die Abkürzung “ $(\forall) t \in A$ ” ist zu lesen als “für fast alle $t \in A$ ” bzw. “für alle $t \in A$ mit Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge”. Schließlich bezeichnen wir mit

$$\text{Si}(t) = R\text{-}\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!} \quad (10)$$

den Integralsinus.¹¹⁾ Alle numerisch berechneten Näherungswerte wurden jeweils nach der sechsten Dezimalstelle abgeschnitten.

¹¹⁾ Siehe [GRADSTEJN/RYSHIK 81], Bd. 2, p. 322, Nr. 8.230 und 8.232. Der Graph der Funktion ist skizziert in [ABRAMOWITZ/STEGUN 84], p. 60.

2. Maximalwerte und Existenz globaler Maximallösungen.

a) Die Maximalwerte der Aufgaben $(P)_{\infty,L}$ und $(P)_{\infty,R}$.

Lemma 2.1.: 1) Die Mengen \mathcal{B}_{∞} , $\mathcal{B}_{\infty,L}$ und $\mathcal{B}_{\infty,R}$ sind nichtleer und konvex.

2) Für jeden Wert $c \in [0, 1]$ existiert ein zulässiger Prozeß $(x^{(c)}, y^{(c)}, u^{(c)}) \in \mathcal{B}$ mit $x^{(c)}(1) = c$, nämlich

$$x^{(c)}(t) = \begin{cases} c(2-t) + (1-c)2(t-1)^2 & | 0 \leq t \leq 1, \\ c/t & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad (11.1)$$

$$y^{(c)}(t) = \begin{cases} -c + (1-c)4(t-1) & | 0 \leq t \leq 1, \\ -c/t^2 & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad (11.2)$$

$$u^{(c)}(t) = \begin{cases} 4(1-c) & | 0 \leq t \leq 1, \\ 2c/t^3 & | 1 < t < \infty. \end{cases} \quad (11.3)$$

Beweis: 1) Die Konvexität der drei Mengen \mathcal{B} , \mathcal{B}_L und \mathcal{B}_R ist offensichtlich, da die Gleichungen und Ungleichungen (3.2) – (3.7) in (t, ξ, η) stückweise affin-linear sind. Das Tripel $(x^{(0)}, y^{(0)}, u^{(0)})$ mit

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} 2(t-1)^2 & | 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y^{(0)}(t) = \begin{cases} 4(t-1) & | 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad u^{(0)}(t) = \begin{cases} 4 & | 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & | 1 < t < \infty \end{cases} \quad (12)$$

gehört wegen $0 \leq 2(t-1)^2 \leq 2-t$ und $-2t(t-1)^2 + 4(t-1) \leq 4(t-1) \leq 0$ für $0 \leq t \leq 1$ zu \mathcal{B} und wegen $x^{(0)}(t) = 0$ für alle $1 \leq t < \infty$ sowohl zu $\mathcal{B}_{\infty,L}$ als auch zu $\mathcal{B}_{\infty,R}$.

2) Offensichtlich gehört auch das Tripel $(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)})$ mit

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} 2-t & | 0 \leq t \leq 1, \\ 1/t & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y^{(1)}(t) = \begin{cases} -1 & | 0 \leq t \leq 1, \\ -1/t^2 & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad u^{(1)}(t) = \begin{cases} 0 & | 0 \leq t \leq 1, \\ 2/t^3 & | 1 < t < \infty \end{cases} \quad (13)$$

zu \mathcal{B} . Also bleiben die Nebenbedingungen (3.2) – (3.7) für die Konvexkombinationen $(x^{(c)}, y^{(c)}, u^{(c)}) = c(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) + (1-c)(x^{(0)}, y^{(0)}, u^{(0)})$ erhalten. ■

Lemma 2.2.: 1) Wenn ein Tripel (x, y, u) zu \mathcal{B} gehört, so liegt y in $C^0(\Omega)$ und ist monoton wachsend, und x liegt in $C^1(\Omega)$, ist monoton fallend und konvex.

2) Es besteht die Inklusion $\mathcal{B}_{\infty,L} \subseteq \mathcal{B}_{\infty,R}$.

Beweis: 1) Alle Aussagen außer der Konvexität von x auf $(0, \infty)$ sind offensichtlich. Diese ergibt sich wie folgt: Seien zuerst $t_0, t \in (0, \infty)$ mit $t_0 \leq t$. Dann gilt $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau \geq \text{Min}_{\tau \in [t_0, t]} \dot{x}(\tau) \cdot (t - t_0) = \dot{x}(t_0) \cdot (t - t_0)$, weil $\dot{x} = y$ monoton wachsend ist. Für $t < t_0$ betrachtet man $x(t_0) - x(t) = \int_t^{t_0} \dot{x}(\tau) d\tau \leq \text{Max}_{\tau \in [t, t_0]} \dot{x}(\tau) \cdot (t_0 - t) = \dot{x}(t_0) \cdot (t_0 - t)$. Für die stetige Funktion x kann die Jensensche Ungleichung auf $[0, \infty)$ ausgedehnt werden.

2) Sei $(x, y, u) \in \mathcal{B}_{\infty}$. Dann ist die nach 1) stetig differenzierbare Funktion $\sin(\cdot)x(\cdot)$ auf jedem kompakten Teilintervall von Ω Riemann-integrabel, und nach [ELSTRODT 96], p. 151 f., Satz 6.3, folgt aus der Konvergenz von $L\text{-}\int_0^{\infty} \sin t \cdot x(t) dt$ die Konvergenz von $R\text{-}\int_0^{\infty} \sin t \cdot x(t) dt$. ■

Lemma 2.3.: 1) Wenn ein Tripel (x, y, u) zu \mathcal{B}_{∞} gehört, so ist die Funktion $h: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß $h(t) = t \cdot x(t)$ monoton wachsend. Also erfüllt x für alle $1 \leq t_0 \leq t$ die Ungleichung

$$t_0 \cdot x(t_0) \leq t \cdot x(t) \leq 1. \quad (14)$$

Insbesondere gilt für alle $t \geq 1$:

$$x(1)/t \leq x(t) \leq 1/t. \quad (15)$$

2) Genau dann gehört $(x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty$ zu $\mathcal{B}_{\infty,L}$, wenn $x(1) = 0$. In diesem Fall gilt außerdem $x(t) = 0$ für alle $t > 1$.

3) Genau dann gehört $(x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty$ zu $\mathcal{B}_{\infty,R} \setminus \mathcal{B}_{\infty,L}$, wenn $0 < x(1) \leq 1$. In diesem Fall ist außerdem

$$F_{\infty,R}(x, y, u) \leq 3 - \sin(1) = 2.158529 \dots \quad (16)$$

Beweis: 1) Wir benutzen folgendes Lemma über Differentialungleichungen:

Lemma 2.4.:¹²⁾ Auf einem abgeschlossenen (endlichen oder unendlichen) Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ mit dem linken Randpunkt $t_0 \in \Omega$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$(D): \quad \dot{x}(t) = g(t, x(t)) \quad \forall t \in \Omega, \quad x(t_0) = \xi_0, \quad x \in C^1(\Omega)$$

mit einer stetigen Funktion $g(t, \xi): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie das Anfangswertproblem für die Differentialungleichung

$$(D)': \quad \dot{x}(t) \geq g(t, x(t)) \quad \forall t \in \Omega, \quad x(t_0) \geq \xi_0, \quad x \in C^1(\Omega).$$

Wenn (D) eine eindeutige Lösung \hat{x} besitzt, so gilt für jede Lösung x von (D)': $x(t) \geq \hat{x}(t)$ für alle $t \in \Omega$. ■

Sei $t_0 \geq 1$. Das lineare Anfangswertproblem (D) für $x \in C^1[t_0, \infty)$ mit $\dot{x}(t) = -x(t)/t \quad \forall t \in [t_0, \infty)$, $x(t_0) = \xi$ besitzt für jedes $\xi \in [0, 1]$ die eindeutige Lösung $\hat{x}(t, \xi) = \xi/t$. Nun ergeben sich die behaupteten Ungleichungen aus Lemma 2.4. und (3.5).

2) Nach [ELSTRODT 96], p. 151 f., Satz 6.3, gehört $(x, y, u) \in \mathcal{B}_\infty$ genau dann zu $\mathcal{B}_{\infty,L}$, wenn das uneigentliche Riemann-Integral

$$R\text{-}\int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \quad (17)$$

absolut konvergiert. Wenn $x(1) = 0$, so bleibt für die monoton fallende Funktion x wegen (3.5) $x(t) = 0$ für alle $t > 1$, und das Integral (17) konvergiert absolut. Gilt jedoch $x(1) > 0$, so folgt mit Teil 1):

$$R\text{-}\int_0^\infty |\sin t \cdot x(t)| dt \geq \int_0^1 |\sin t \cdot x(t)| dt + x(1) \cdot R\text{-}\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt; \quad (18)$$

nach [ELSTRODT 96], p. 152, Beispiel 6.4, divergiert jedoch das letzte Integral.

3) Wir zeigen, daß in diesem Fall das Riemann-Integral (17) bedingt konvergiert. Wegen $x \in C^1(\Omega)$ erhalten wir

$$R\text{-}\int_1^\infty \sin t \cdot x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \sin t \cdot x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\cos(T) \cdot x(T) + \cos(1) \cdot x(1) + \int_1^T \cos t \cdot \dot{x}(t) dt \right).$$

Hierin gilt einerseits (19)

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} (-\cos(T) \cdot x(T)) \leq \text{Max}_{T \geq 1} (-\cos(T)) \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0, \quad (20)$$

andererseits folgt aus $x(t) \leq 1/t$ die Ungleichung $\dot{x}(t) \geq -x(t)/t \geq -1/t^2$, und damit konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$R\text{-}\int_1^\infty |\cos t \cdot \dot{x}(t)| dt \leq R\text{-}\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 1 \quad (21)$$

¹²⁾ [WALTER 00], p. 102, Satz VIII, zusammen mit p. 100, Definition VI.

absolut. Damit ist die partielle Integration in (17) gerechtfertigt (vergleiche [FICHTENHOLZ 90], p. 550, Nr. 488), das Integral $R \int_1^\infty \sin t \cdot x(t) dt$ konvergiert bedingt, und (x, y, u) liegt in $\mathcal{B}_{\infty, R} \setminus \mathcal{B}_{\infty, L}$. Zusammen mit

$$\left| \int_0^1 \sin t \cdot x(t) dt \right| \leq \int_0^1 \sin t \cdot (2-t) dt = 2 - \sin(1) - \cos(1) \quad (22)$$

erhalten wir schließlich

$$F_{\infty, R}(x, y, u) \leq \left| R \int_0^\infty \sin t \cdot x(t) dt \right| \leq 3 - \sin(1). \quad \blacksquare \quad (23)$$

Anmerkung: Nach Lemma 2.3., 3) liegen alle Tripel $(x^{(c)}, y^{(c)}, u^{(c)})$ mit $0 < c \leq 1$ aus Lemma 2.1., 2) in $\mathcal{B}_{\infty, R} \setminus \mathcal{B}_{\infty, L}$.

Beweis zu Satz 1.2., 1): Sei $(x, y, u) \in \mathcal{B}_{\infty, L}$, also $x(t) = 0 \forall t \geq 1$ nach Lemma 2.3., 2). Wir begnügen uns mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} F_{\infty, L}(x, y, u) &= \int_0^1 \sin t \cdot x(t) dt \leq \int_0^1 \sin t \cdot (2-t) dt = 2 - \sin(1) - \cos(1) \\ &\implies \mu_L \leq 2 - \sin(1) - \cos(1) = 0.618226... \end{aligned} \quad (24)$$

Andererseits gehört der in Lemma 2.1., 2) erklärte Prozeß $(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)})$ zu $\mathcal{B}_{\infty, R}$. Der zugehörige Zielfunktionswert ist

$$F_{\infty, R}(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) = \int_0^1 \sin t \cdot (2-t) dt + R \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt = 2 - \sin(1) - \cos(1) + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(1) \right). \quad (25)$$

Wegen $\text{Si}(1) = 0.946083... < 1.570796... = \pi/2$ erhalten wir

$$\mu_L \leq 2 - \sin(1) - \cos(1) < F_{\infty, R}(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) = 2 - \sin(1) - \cos(1) + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(1) \right) \leq \mu_R. \quad \blacksquare \quad (26)$$

b) Existenz globaler Maximallösungen für $(P)_{\infty, L}$ und $(P)_{\infty, R}$.

Beweis zu Satz 1.2. (Fortsetzung): 2) Wir betrachten zu $T = 1$ das Problem $(P)_1$ und fügen zu (8.1) – (8.7) die Randbedingungen $x(1) = y(1) = 0$ hinzu, womit eine Aufgabe $(\tilde{P})_1$ entsteht. Auf die zu $(\tilde{P})_1$ gehörige relaxierte Aufgabe darf der Existenzsatz [PICKENHAIN/WAGNER 00B], p. 304, Theorem 2.1., angewendet werden (dieser Satz bleibt auch für einen Definitionsbereich $[0, 1] \subset \mathbb{R}^1$ und $1 < p < \infty$ richtig). Da x, y und u linear ins Zielfunktional (8.1) und die Zustandsgleichungen (8.2) – (8.3) eingehen, liefert der Existenzsatz für die relaxierte Aufgabe gleichzeitig die Existenz einer globalen Maximalstelle (x, y, u) fürs unrelaxierte Problem $(\tilde{P})_1$. Setzen wir deren Komponenten auf $(1, \infty)$ mit Null fort, so gelangen wir im Hinblick auf Lemma 2.3., 2) zu einer globalen Maximalstelle (x_L, y_L, u_L) von $(P)_{\infty, L}$.

3) • Schritt 1: Für $(P)_{\infty, R}$ existiert nach Lemma 2.3., 3) eine Maximalfolge $\{(x^{(N)}, y^{(N)}, u^{(N)})\}$, $\mathcal{B}_{\infty, R}$. Sei $T > 0$ gegeben. Dann gehören die Einschränkungen $(x^{(N)}, y^{(N)}, u^{(N)})|_{[0, T]}$ zu $W^{1,p}[0, T] \times W^{1,p}[0, T] \times L^\infty[0, T]$, und die Folgen $\{x^{(N)}\}$, $W^{1,p}[0, T]$, $\{y^{(N)}\}$, $W^{1,p}[0, T]$ und $\{u^{(N)}\}$, $L^\infty[0, T]$ sind jeweils normbeschränkt.¹³⁾ Nun wählen wir $T = \pi$. Mit Hilfe des Einbettungssatzes von Rellich-Kondrachev ([ADAMS 78], p. 144, Theorem 6.2, Part III) können wir auf die Existenz von Teilfolgen von $\{(x^{(N)}, y^{(N)}, u^{(N)})\}$

¹³⁾ Wir verzichten im folgenden darauf, die Einschränkungen explizit zu notieren, und schreiben $x^{(N)} \in W^{1,p}[0, T]$ anstelle von $x^{(N)}|_{[0, T]} \in W^{1,p}[0, T]$ usw.

$u^{(N)})$ } und Funktionen $\hat{x}_1 \in W^{1,p}[0, \pi] \cap C^0[0, \pi]$, $\hat{y}_1 \in W^{1,p}[0, \pi] \cap C^0[0, \pi]$ und $\hat{u}_1 \in L^\infty[0, \pi]$ mit folgenden Eigenschaften schließen:

$$\{(x^{(N^{(1)}), y^{(N^{(1)}), u^{(N^{(1)})})} \subseteq \{(x^{(N)}, y^{(N)}, u^{(N)})\} \quad \text{mit} \quad (27.1)$$

$$x^{(N^{(1)})} \rightharpoonup W^{1,p}[0, \pi] \hat{x}_1, \quad y^{(N^{(1)})} \rightharpoonup W^{1,p}[0, \pi] \hat{y}_1, \quad u^{(N^{(1)})} \xrightarrow{*} L^\infty[0, \pi] \hat{u}_1, \quad (27.2)$$

$$\hat{x}_1(t) = \hat{y}_1(t), \quad \hat{y}_1(t) = \hat{u}_1(t) \quad \forall t \in (0, \pi) \quad \text{und} \quad 0 \leq \hat{u}_1(t) \leq 5 \quad (\forall t \in [0, \pi]) \quad \text{sowie} \quad (27.3)$$

$$\lim_{N^{(1)} \rightarrow \infty} \|x^{(N^{(1)})} - \hat{x}_1\|_{C^0[0, \pi]} = 0, \quad \lim_{N^{(1)} \rightarrow \infty} \|y^{(N^{(1)})} - \hat{y}_1\|_{C^0[0, \pi]} = 0 \quad (27.4)$$

(vergleiche [PICKENHAIN/WAGNER 00A], p. 223). Sukzessive bilden wir für alle $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, Teilfolgen mit folgenden Eigenschaften:

$$\{(x^{(N^{(k)}), y^{(N^{(k)}), u^{(N^{(k)})})} \subseteq \{(x^{(N^{(k-1)}), y^{(N^{(k-1)}), u^{(N^{(k-1)})})} \} \quad \text{mit} \quad (28.1)$$

$$x^{(N^{(k)})} \rightharpoonup W^{1,p}[0, k\pi] \hat{x}_k, \quad y^{(N^{(k)})} \rightharpoonup W^{1,p}[0, k\pi] \hat{y}_k, \quad u^{(N^{(k)})} \xrightarrow{*} L^\infty[0, k\pi] \hat{u}_k, \quad (28.2)$$

$$\hat{x}_k(t) = \hat{y}_k(t), \quad \hat{y}_k(t) = \hat{u}_k(t) \quad \forall t \in (0, k\pi) \quad \text{und} \quad 0 \leq \hat{u}_k(t) \leq 5 \quad (\forall t \in [0, k\pi]) \quad \text{sowie} \quad (28.3)$$

$$\lim_{N^{(k)} \rightarrow \infty} \|x^{(N^{(k)})} - \hat{x}_k\|_{C^0[0, k\pi]} = 0, \quad \lim_{N^{(k)} \rightarrow \infty} \|y^{(N^{(k)})} - \hat{y}_k\|_{C^0[0, k\pi]} = 0. \quad (28.4)$$

Aus der Konstruktion folgt die Übereinstimmung der Einschränkungen $\hat{x}_k(t) = \hat{x}_{k-1}(t)$ und $\hat{y}_k(t) = \hat{y}_{k-1}(t)$ $\forall t \in [0, (k-1)\pi]$ sowie $\hat{u}_k(t) = \hat{u}_{k-1}(t)$ ($\forall t \in [0, (k-1)\pi]$). Wir gelangen damit zu Grenzfunktionen $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}) \in (W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)) \times (W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)) \times L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ mit den Einschränkungen $\hat{x}|_{[0, k\pi]} = \hat{x}_k$, $\hat{y}|_{[0, k\pi]} = \hat{y}_k$ und $\hat{u}|_{[0, k\pi]} = \hat{u}_k$.

• **Schritt 2:** Nun konstruieren wir eine Diagonalfolge mit folgenden Eigenschaften: Aus $\{(x^{(N^{(1)}), y^{(N^{(1)}), u^{(N^{(1)})})} \}$ entnehmen wir das erste Tripel $(x^{(N_1)}, y^{(N_1)}, u^{(N_1)})$ mit

$$\|x^{(N_1)} - \hat{x}_1\|_{C^0[0, \pi]} \leq 1/2 \quad \text{und} \quad \|y^{(N_1)} - \hat{y}_1\|_{C^0[0, \pi]} \leq 1/2; \quad (29)$$

aus $\{(x^{(N^{(2)}), y^{(N^{(2)}), u^{(N^{(2)})})} \}$ entnehmen wir das erste Tripel $(x^{(N_2)}, y^{(N_2)}, u^{(N_2)})$ mit $N_2 > N_1$ und

$$\|x^{(N_2)} - \hat{x}_2\|_{C^0[0, 2\pi]} \leq 1/4 \quad \text{und} \quad \|y^{(N_2)} - \hat{y}_2\|_{C^0[0, 2\pi]} \leq 1/4; \quad (30)$$

allgemein entnehmen wir für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, aus $\{(x^{(N^{(k)}), y^{(N^{(k)}), u^{(N^{(k)})})} \}$ das erste Tripel $(x^{(N_k)}, y^{(N_k)}, u^{(N_k)})$ mit $N_k > N_{k-1}$ und

$$\|x^{(N_k)} - \hat{x}_k\|_{C^0[0, k\pi]} \leq 1/2^k \quad \text{und} \quad \|y^{(N_k)} - \hat{y}_k\|_{C^0[0, k\pi]} \leq 1/2^k. \quad (31)$$

Die Diagonalfolgen $\{x^{(N_k)}\}$ und $\{y^{(N_k)}\}$ konvergieren auf ganz $[0, \infty)$ überall punktweise gegen die stetigen Grenzfunktionen \hat{x} bzw. \hat{y} , die überdies der Anfangsbedingung $\hat{x}(0) = 2$ und den Phasenbeschränkungen (3.5) und (3.6) genügen, während die Diagonalfolge $\{u^{(N_k)}\}$ fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion \hat{u} konvergiert, die die Steuerbeschränkung (3.7) einhält. Benutzt man die Darstellung des Zielfunktionals aus (19), nämlich

$$F_{\infty, R}(x, y, u) = \cos(1) \cdot x(1) + \int_0^1 \sin t \cdot x(t) dt + L \int_1^\infty \cos t \cdot y(t) dt, \quad (32)$$

so kann man entlang der Teilfolge $\{(x^{(N_k)}, y^{(N_k)}, u^{(N_k)})\}$ auf das letzte Integral den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden, weil $|\hat{y}|$ eine integrable Majorante für die $|y^{(N_k)}|$ darstellt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mu_R &= \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\infty, R}(x^{(N_k)}, y^{(N_k)}, u^{(N_k)}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(1) \cdot x^{(N_k)}(1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin t \cdot x^{(N_k)}(t) dt + \lim_{k \rightarrow \infty} L \int_1^\infty \cos t \cdot y^{(N_k)}(t) dt \\
&= \cos(1) \cdot \hat{x}(1) + \int_0^1 \sin t \cdot \hat{x}(t) dt + L \int_1^\infty \cos t \cdot \hat{y}(t) dt, \tag{33}
\end{aligned}$$

und $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u})$ ist eine globale Maximallösung von $(P)_{\infty, R}$.

4) Nachdem die Existenz globaler Maximallösungen von $(P)_{\infty, L}$ bzw. $(P)_{\infty, R}$ nachgewiesen ist, ergibt sich die Aussage aus Teil 1) des Satzes. ■

c) Untersuchung der Aufgaben $(P)_T$ für $T > 1$.

Beweis zu Satz 1.3.: 1) Sei $T > 1$. Dann ist die Einschränkung des oben definierten Tripels $(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)})$ auf $[0, T]$ in $(P)_T$ zulässig, und es gilt:

$$F_T(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) = \int_0^1 \sin t \cdot (2-t) dt + \int_1^T \frac{\sin t}{t} dt = 2 - \sin(1) - \cos(1) + \text{Si}(T) - \text{Si}(1). \tag{34}$$

Nun gilt $\text{Si}(T) - \text{Si}(1) > 0$ für alle $1 < T \leq \pi$ und $\text{Si}(T) - \text{Si}(1) \geq \inf_{\tau \in (\pi, \infty)} \text{Si}(\tau) - \text{Si}(1) = \text{Si}(2\pi) - \text{Si}(1) = 1.418734\dots - 0.946083\dots > 0$ für alle $\pi < T < \infty$, woraus wir mit (26) erhalten:

$$\mu_L \leq 2 - \sin(1) - \cos(1) < 2 - \sin(1) - \cos(1) + \text{Si}(T) - \text{Si}(1) = F_T(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) \leq \mu_T. \tag{35}$$

2) Wir argumentieren ebenso wie im Beweis zu Satz 1.2., 2): Auf die relaxierte Aufgabe zu $(P)_T$ darf wiederum der Existenzsatz [PICKENHAIN/WAGNER 00B], p. 304, Theorem 2.1., angewendet werden. Da x , y und u linear ins Zielfunktional (8.1) und die Zustandsgleichungen (8.2) – (8.3) eingehen, liefert der Existenzsatz für die relaxierte Aufgabe gleichzeitig die Existenz einer globalen Maximalstelle fürs unrelaxierte Problem.

3) Aus Lemma 2.3., 2) ergibt sich, daß genau die zulässigen Lösungen von $(P)_T$ mit $x(1) = 0$ zu zulässigen Lösungen von $(P)_{\infty, L}$ fortgesetzt werden können. Für eine derartige Lösung muß außerdem $x(t) = 0$ für alle $1 \leq t \leq T$ bleiben. Daher gilt

$$F_T(x, y, u) = \int_0^1 \sin t \cdot x(t) dt \leq \mu_L < \mu_T, \tag{36}$$

und damit ist die Fortsetzung einer globalen Maximalstelle von $(P)_T$ zu einer zulässigen Lösung von $(P)_{\infty, L}$ unmöglich. ■

3. Globale Maximallösungen von $(P)_{\infty, L}$ und $(P)_{\infty, R}$.

a) Eine globale Maximalstelle in $(P)_{\infty, L}$.

Lemma 3.1.: Wir fügen zur Aufgabe $(P)_1$ die Randbedingungen $x(1) = y(1) = 0$ hinzu und bezeichnen das entstehende Problem mit $(\tilde{P})_1$. Für alle zulässigen Lösungen (x, y, u) von $(\tilde{P})_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
g_4(t) &= \text{Max} \left(0, \left(2 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} \right) \\
&\leq x(t) \leq g_5(t) = \text{Min} \left(2-t, \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} \right) \tag{37}
\end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq 1$, worin

$$C_1 = -4 \int_0^1 (s-1) e^{s^2/2} ds = 2.184945 \dots \quad (38)$$

Beweis: Wir betrachten das lineare Anfangswertproblem (D) für $x \in C^1[0, 1]$ mit $\dot{x}(t) = -tx(t) + 4(t-1)$ $\forall t \in [0, 1]$, $x(0) = \xi$ und seine Lösung

$$\hat{x}(t, \xi) = e^{-t^2/2} \left(\xi + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right). \quad (39)$$

Mit Lemma 2.4. ergibt sich aus (8.4) und (8.6) die Ungleichung

$$e^{-t^2/2} \left(2 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \leq x(t) \quad \forall t \in [0, 1] \quad (40)$$

für alle in $(P)_1$ zulässigen (x, y, u) , und daraus zusammen mit (8.5) die erste Ungleichung. Zum Beweis der zweiten Ungleichung stellen wir fest, daß die Funktion

$$\hat{x}(t, C_1) = \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} = -4 \int_t^1 (s-1) e^{s^2/2} ds \cdot e^{-t^2/2} \quad (41)$$

den Randwert $\hat{x}(1, C_1) = 0$ annimmt. Mit Lemma 2.4. schließen wir, daß aus $x(t_0) > \hat{x}(t_0, C_1)$ für irgendein $t_0 \in [0, 1]$ die Ungleichung $x(t) > \hat{x}(t, C_1) \forall t \in [t_0, 1]$ folgt, so daß eine derartige Funktion nicht zu einem zulässigen Tripel (x, y, u) von $(P)_1$ gehören kann. Daraus ergibt sich zusammen mit (8.5) die zweite Ungleichung. ■

Satz 3.2.: 1) Die zulässige Lösung $(x, y, u) \in \mathcal{B}_{\infty, L}$

$$x(t) = \begin{cases} C_2 t + 2 & | 0 \leq t \leq t_0, \\ \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} & | t_0 \leq t \leq 1, \\ 0 & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad (42.1)$$

$$y(t) = \begin{cases} C_2 & | 0 \leq t \leq t_0, \\ -t \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} + 4(t-1) & | t_0 \leq t \leq 1, \\ 0 & | 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad (42.2)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & | 0 \leq t \leq t_0, \\ (t^2 - 1) \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} - 4t(t-1) + 4 & | t_0 < t \leq 1, \\ 0 & | 1 < t < \infty, \end{cases} \quad (42.3)$$

mit C_1 aus Lemma 3.1., $C_2 = -3.006012 \dots$ und $t_0 = 0.331662 \dots$ gemäß (47) und (48) ist eine globale Maximalstelle von $(P)_{\infty, L}$.

2) Der Maximalwert von $(P)_{\infty, L}$ beträgt $\mu_L = 0.072839 \dots$.

Beweis: 1) Als Lösung der linearen DGL. aus dem Beweis zu Lemma 3.1. erfüllt die Funktion $\hat{x}(t, C_1)$ die Gleichung $\hat{x}'(1, C_1) = -1 \cdot \hat{x}(1, C_1) = 0$, also erfüllt die Funktion g_5 die zusätzlichen Randbedingungen $x(1) = y(1) = 0$. Wir können daher die x -Komponente einer globalen Maximallösung von $(\tilde{P})_1$ als die größte stetig differenzierbare, monoton fallende, konvexe Funktion $x(t)$ in dem durch die Ungleichung (37)

beschriebenen Streifen aufsuchen.¹⁴⁾ Diese ergibt sich als konvexe Hüllfunktion von g_5 und kann zu einem zulässigen Prozeß ergänzt werden.

Die konvexe Hüllfunktion $x(t)$ von

$$g_5(t) = \text{Min} \left(2 - t, \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} \right) \quad (43)$$

setzt sich aus einem affin-linearen Teilstück

$$x(t) = C_2 t + 2, \quad t \in [0, t_0] \quad (44)$$

und einem Teilbogen

$$x(t) = -4 \int_t^1 (s-1) e^{s^2/2} ds \cdot e^{-t^2/2}, \quad t \in [t_0, 1] \quad (45)$$

zusammen, wobei $C_2 \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in (0, 1)$ durch die Bedingungen

$$x(t_0) = C_2 t_0 + 2 = -4 \int_{t_0}^1 (s-1) e^{s^2/2} ds \cdot e^{-(t_0)^2/2} \quad \text{sowie} \quad (46)$$

$$\dot{x}(t_0) = C_2 = -4 t_0 \int_{t_0}^1 (s-1) e^{s^2/2} ds \cdot e^{-(t_0)^2/2} + 4(t_0 - 1) \implies \quad (47)$$

$$-4(t_0^2 + 1) \int_{t_0}^1 (s-1) e^{s^2/2} ds \cdot e^{-(t_0)^2/2} + 4 t_0 (t_0 - 1) + 2 = 0 \quad (48)$$

eindeutig bestimmt sind. Wir erhalten $t_0 = 0.331662\dots$ und $C_2 = -3.006012\dots$.

Wir haben noch die Zulässigkeit des angegebenen Tripels zu überprüfen. Aus der Konstruktion von C_2 und t_0 folgt $x \in C^1[0, 1]$, und infolge von Lemma 3.1. erfüllt das Tripel (x, y, u) mit $y(t) = \dot{x}(t) \forall t \in (0, 1)$ und $u(t) = \ddot{x}(t) (\forall t \in [0, 1])$ die Restriktionen (8.2) – (8.6) sowie die zusätzlichen Randbedingungen $x(1) = y(1) = 0$. Weiterhin gilt $\ddot{x}(t) = u(t) \geq 0$ für alle $t \in (t_0, 1)$, weil x konvex ist. Schließlich besteht für alle $t \in (t_0, 1)$ die Abschätzung

$$u(t) = 4(t^2 - 1) \int_t^1 (1-s) e^{s^2/2} ds \cdot e^{-t^2/2} - 4t(t-1) + 4 \leq 4(1+t-t^2) \leq 5, \quad (49)$$

womit auch (8.7) erfüllt ist.

2) Für den Maximalwert von $(P)_{\infty, L}$ erhalten wir durch Einsetzen der globalen Maximalstelle aus Teil 1)

$$\begin{aligned} \mu_L &= \int_0^1 \sin t \cdot x(t) dt = \int_0^{t_0} \sin t \cdot (C_2 t + 2) dt + \int_{t_0}^1 \sin t \left(C_1 + 4 \int_0^t (s-1) e^{s^2/2} ds \right) \cdot e^{-t^2/2} dt \\ &= 0.072839\dots \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (50)$$

b) Eine globale Maximalstelle in $(P)_{\infty, R}$.

Satz 3.3.: 1) Die Lösung $(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) \in \mathcal{B}_{\infty, R}$ gemäß Lemma 2.1., 2) ist eine globale Maximalstelle von $(P)_{\infty, R}$.

2) Der Maximalwert von $(P)_{\infty, R}$ beträgt $\mu_R = 1.242940\dots$.

¹⁴⁾ Damit erübrigt sich die Verwendung des Pontrjaginschen Maximumprinzips für phasenbeschränkte Steuerungsprobleme (siehe [IOFFE/TICHOMIROW 79], p. 208, Satz 1).

Beweis: 1) Nach Lemma 2.4., 1) ist für jede zulässige Lösung $(x, y, u) \in \mathcal{B}_{\infty, R}$ die Funktion $h(t) = t \cdot x(t) \leq 1$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz ([ELSTRODT 96], p. 154, Satz 6.6):

$$h(1) \int_1^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \leq \int_1^{\pi} \frac{\sin t}{t} \cdot (t x(t)) dt \leq h(\pi) \int_1^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{und} \quad (51.1)$$

$$h(2\pi) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} \cdot (t x(t)) dt \leq h(\pi) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad (51.2)$$

also zusammen

$$\int_1^{2\pi} \sin t \cdot x(t) dt \leq \pi \cdot x(\pi) \int_1^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad (52)$$

und allgemein für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$h(2k\pi) \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \cdot (t x(t)) dt \leq h((2k+1)\pi) \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{und} \quad (53.1)$$

$$h((2k+2)\pi) \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \leq \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{t} \cdot (t x(t)) dt \leq h((2k+1)\pi) \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad (53.2)$$

also zusammen

$$\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} \sin t \cdot x(t) dt \leq (2k+1)\pi \cdot x((2k+1)\pi) \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{t} dt. \quad (54)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \sin t \cdot x(t) dt &= \int_1^{2\pi} \sin t \cdot x(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} \sin t \cdot x(t) dt \\ &\leq \pi \cdot x(\pi) \int_1^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)\pi \cdot x((2k+1)\pi) \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned} \quad (55)$$

Setzt man hierin $x^{(1)}(t) = 1/t$ ein, so werden alle Abschätzungen scharf. Zusammen mit (24) ergibt sich $F_{\infty, R}(x, y, u) \leq F_{\infty, R}(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)})$, und $(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)})$ ist globale Maximalstelle.

2) Mit (25) ergibt sich $\mu_R = F_{\infty, R}(x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}) = 1.242940 \dots \blacksquare$

Literaturverzeichnis.

1. [ABRAMOWITZ/STEGUN 84] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (Hrsg.): *Pocketbook of Mathematical Functions*. Abridged edition of the Handbook of Mathematical Functions. Verlag Harri Deutsch; Thun - Frankfurt/M. 1984
2. [ADAMS 78] Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press; Boston etc. 1978
3. [BALDER 83] Balder, E. J.: *An existence result for optimal economic growth problems*. J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 195 – 213
4. [BAUM 76] Baum, R. F.: *Existence theorems for Lagrange control problems with unbounded time domain*. J. Optim. Theory Appl. **19** (1976), 89 – 116
5. [BLOT/HAYEK 96] Blot, J.; Hayek, N.: *Second-order necessary conditions for the infinite-horizon variational problems*. Mathematics of Operations Research **21** (1996), 979 – 990
6. [BLOT/HAYEK 00] Blot, J.; Hayek, N.: *Sufficient conditions for infinite-horizon calculus of variations problems*. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **5** (2000), 279 – 292

-
7. [BLOT/MICHEL 96] Blot, J.; Michel, P.: *First-order necessary conditions for infinite-horizon variational problems*. J. Optim. Theory Appl. **88** (1996), 339 – 364
 8. [CARLSON/HAURIE/LEIZAROWITZ 91] Carlson, D. A.; Haurie, A. B.; Leizarowitz, A.: *Infinite Horizon Optimal Control*. Springer; Berlin etc. 1991, 2. Aufl.
 9. [DMITRUK/KUZ'KINA 05] Dmitruk, A. V.; Kuz'kina, N. V.: *Existence theorem in the optimal control problem on an infinite time interval*. Mathematical Notes **78** (2005), 466 – 480
 10. [ELSTRODT 96] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer; Berlin etc. 1996
 11. [FEICHTINGER/HARTL 86] Feichtinger, G.; Hartl, R. F.: *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*. de Gruyter; Berlin - New York 1986
 12. [FICHTENHOLZ 90] Fichtenholz, G. M.: *Differential- und Integralrechnung. Band II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1990, 10. Aufl.
 13. [GALE 67] Gale, D.: *On optimal development in a multi-sector economy*. The Review of Economic Studies **34** (1967), 1 – 18
 14. [GOH/LEITMANN/VINCENT 74] Goh, B. S.; Leitmann, G.; Vincent, T. L.: *Optimal control of a prey-predator system*. Mathematical Biosciences **19** (1974), 263 – 286
 15. [GRADSTEJN/RYSHIK 81] Gradstejn, I. S.; Ryzhik, I. M.: *Summen-, Produkt- und Integraltafeln / Tables of Series, Products and Integrals. Band 1 und 2*. Verlag Harri Deutsch; Thun - Frankfurt/M. 1981 (zweisprachige Ausgabe deutsch-englisch)
 16. [HALKIN 74] Halkin, H.: *Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons*. Econometrica **42** (1974), 267 – 272
 17. [IOFFE/TICHOMIROW 79] Ioffe, A. D.; Tichomirow, V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1979
 18. [MAGILL 82] Magill, M. J. P.: *Pricing infinite horizon programs*. J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 398 – 421
 19. [PICKENHAIN/LYKINA 06] Pickenhain, S.; Lykina, V.: *Sufficiency conditions for infinite horizon optimal control problems*. In: Seeger, A. (Hrsg.): *Recent Advances in Optimization*. Springer; Berlin etc. 2006 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 563), 217 – 232
 20. [PICKENHAIN/LYKINA/WAGNER 06] Pickenhain, S.; Lykina, V.; Wagner, M.: *Lebesgue and improper Riemann integrals in infinite horizon control problems*. BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-02/2006
 21. [PICKENHAIN/WAGNER 00A] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Critical points in relaxed deposit problems*. In: Ioffe, A.; Reich, S.; Shafrir, I. (Hrsg.): *Calculus of Variations and Optimal Control*, Technion 98, Vol. II (Research Notes in Mathematics, Vol. 411). Chapman & Hall/CRC Press; Boca Raton etc. 2000, 217 – 236
 22. [PICKENHAIN/WAGNER 00B] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Pontryagin principle for state-constrained control problems governed by a first-order PDE system*. J. Optim. Theory Appl. **107** (2000), 297 – 330
 23. [WALTER 00] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer; Berlin etc. 2000, 7. Aufl.
 24. [v. WEIZSÄCKER 65] v. Weizsäcker, Carl Christian: *Existence of optimal programs of accumulation for an infinite time horizon*. The Review of Economic Studies **32** (1965), 85 – 104
 25. [ZASLAVSKI 95] Zaslavski, A. J.: *The existence of periodic minimal energy configurations for one-dimensional infinite horizon variational problems arising in continuum mechanics*. J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), 459 – 476

Zuletzt geändert: 22. 02. 2007

Anschriften / e-Mail: Valeriya Lykina: BTU Cottbus, Institut für Mathematik, Karl-Marx-Str. 17, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus. e-Mail: lykina@math.tu-cottbus.de

Sabine Pickenhain: BTU Cottbus, Institut für Mathematik, Karl-Marx-Str. 17, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus. e-Mail: sabine@math.tu-cottbus.de

Marcus Wagner: BTU Cottbus, Institut für Mathematik, Karl-Marx-Str. 17, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus. Homepage / e-mail: www.thecityto come.de / wagner@math.tu-cottbus.de