

Praktikumsthemen zum Kurs Analysis 1998/99

Thema MA-01/98: CANTOR-STAU UND FATOU-STAU ALS INVARIANTE MENGEN

Nachdem CANTOR-Mengen jahrzehntelang als paradoxe, praktisch aber bedeutungslose Konstruktionen angesehen wurden, wurde in den 70er Jahren wiederentdeckt, daß elementare reelle Funktionen Mengen von diesem Typ als Invarianzbereiche haben. Man untersuche zunächst das Verhalten des CANTOR-Staubes unter einer reellen Betragsfunktion g und ihren Iterierten und bestimme anschließend die Invarianzbereiche quadratischer Funktionen $h_\lambda(x)$.

Thema MA-02/98: DISKONTINUIERLICHE MENGEN POSITIVEN MASSES

Unsere geometrische Vorstellung scheint nahezulegen, daß jede Menge positiven linearen Maßes mindestens ein Kontinuum — etwa ein Intervall $[a, b]$, $a < b$ — als Teilmenge enthalten muß und deshalb gleichzeitig überabzählbar ist. Anhand geeigneter CANTOR-Mengen ist zu untersuchen, in welcher Weise sich die Eigenschaften “zusammenhängend”, “überabzählbar” und “Menge von positivem linearem Maß” für Teilmengen von $\mathbb{R}$ gegenseitig bedingen.

Thema MA-03/98: DIE Mengersche UNIVERSALKURVE

Das Bild zeigt den Anfang der Konstruktion eines “Schwammes” $\mathcal{S}$, der entsteht, indem aus dem dreidimensionalen Einheitswürfel sukzessiv offene Teilwürfel der Kantenlängen $1/3$, $1/9$, $1/27$, ... gelöscht werden. Man stelle die Konstruktion graphisch dar (bis zum vierten Schritt) und untersuche den “Schwamm”, der sich ergibt, wenn diese Konstruktion ins Unendliche fortgesetzt wird.

Thema MA-04/98: DIE HAUSDORFF-DIMENSION IM $\mathbb{R}^3$

Der Begriff der Dimension einer Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ kann nach FELIX HAUSDORFF koordinatenunabhängig definiert werden. Dabei wird eine Überdeckungsmessung benutzt, was zur Folge hat, daß auch gebrochene Zahlen als Dimensionen auftreten können. Das ist insbesondere für fraktale Mengen der Fall. Man untersuche HAUSDORFFs Verfahren und bestimme die Hausdorff-Dimensionen typischer Mengen.

Thema MA-05/98: DIE CANTOR-FUNKTION

Die Konstruktion des CANTORSchen Diskontinuums $\mathcal{C}$ kann als stufenweises Verdichten einer gleichmäßig über das Einheitsintervall verteilten Gesamtmasse 1 verstanden werden: Nach dem Löschen von $(1/3, 2/3)$ verbleiben zwei Intervalle der Masse $1/2$, nach dem Löschen von $(1/9, 2/9)$ und $(7/9, 8/9)$ vier Intervalle der Masse $1/4$ und so fort. Denkt man sich den Prozeß ins Unendliche fortgesetzt, so wird zuletzt die gesamte Masse in den Punkten von $\mathcal{C}$ konzentriert. Man untersuche die CANTOR-Funktion $\omega(x)$, welche die auf $[0, x]$ konzentrierte Teilmasse von $\mathcal{C}$ beschreibt.

Thema MA-06/98: DER SCHWARZSCHE ZYLINDER — INHALTSMESSUNG FÜR FLÄCHEN IM $\mathbb{R}^3$

Die Länge einer Raumkurve $\mathcal{C}$ wird bestimmt, indem man eine Folge von Polygonzügen $\{\mathcal{P}_n\}$ angibt, so daß die Endpunkte der Strecken jedes Polygonzugs $\mathcal{P}_n$ auf $\mathcal{C}$ liegen und das Maximum ihrer Länge gegen Null strebt; die Länge von $\mathcal{C}$ ist das Supremum der Längen der $\mathcal{P}_n$. Man untersuche, ob der Inhalt eines räumlichen Flächenstücks $\mathcal{S}$ in gleicher Weise durch Triangulation bestimmt werden kann, wenn das Maximum der Inhalte der Dreiecksflächen gegen Null strebt.

Thema MA-07/98: ÜBERALL DICHT E Überdeckungen von KREISLINIE UND TORUS

Man untersuche die Verteilung der Punkte P_n mit den Zentriwinkeln $\varphi_n = (\varphi_0 + n\alpha) \bmod 2\pi$ auf der Einheitskreislinie $S \cong [0, 2\pi)$ und das Verhalten einer Bahnkurve mit konstantem Anstieg ω_1/ω_2 auf dem Torus $T \cong [0, 2\pi)^2$. Insbesondere beweise man, daß in beiden Fällen eine überall dichte Überdeckung erreicht wird, wenn die Verhältnisse $\alpha/2\pi$ bzw. ω_1/ω_2 inkommensurabel sind.

Thema MA-08/98: VOLLSTÄNDIGE DREHUNGEN EINER STRECKE INNERHALB EBENER FIGUREN

In einem Kreis oder einem Rechteck kann man bestimmte Strecken um 360° drehen, ohne den Rand der Figur zu überschreiten. Man untersuche allgemein, welche Gestalt und welchen Flächeninhalt eine ebene Figur haben muß, die so beschaffen ist, daß man eine Strecke vorgegebener Länge L innerhalb der Figur um 360° drehen kann. Insbesondere bestätige man, daß zu jedem $L > 0$ eine Figur mit der verlangten Eigenschaft und beliebig kleinem Flächeninhalt existiert.