Maßtheorie. Unterlagen zum Diplomanden- und Forschungsseminar

Marcus Wagner

Reihe Mathematik
M-08/2007

Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Fakultät 1, Mathematisches Institut
Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus

Maßtheorie. Unterlagen zum Diplomanden- und Forschungsseminar

Marcus Wagner

Die vorliegende Zusammenstellung wurde im Jahr 2004 mit dem Ziel erarbeitet, einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Maßtheorie für die Anwendung auf Variations- und Steuerungsprobleme zur Verfügung zu stellen und dabei gleichzeitig ein System konsistenter Bezeichnungen vorzuschlagen.

a) Definitionsbereiche für Mengenfunktionen.

Definition 1 (Ring, Algebra, σ-Algebra): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Ein System $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *(Mengen-)Ring*, wenn es die leere Menge enthält und unter der Bildung von endlichen Durchschnitten und Vereinigungen abgeschlossen ist. $\mathfrak{A}$ heißt *(Mengen-)Algebra*, wenn es Ω selbst enthält und unter der Bildung von Komplement und endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra*, wenn es Ω selbst enthält und unter der Bildung von Komplement und abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist.

$*$ Jede σ-Algebra ist eine Mengenalgebra, jede Mengenalgebra ist ein Mengenring.
$*$ Beispiele für σ-Algebren über beliebigem Ω: $\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\emptyset, \mathrm{A}, \Omega \setminus \mathrm{A}, \Omega\}$, $\mathfrak{P}(\Omega)$; Beispiele für σ-Algebren über $\mathbb{R}^m$: die Borelschen und Lebesgueschen Mengen des $\mathbb{R}^m$.

Definition 2 (Erzeugendensystem, von $\mathfrak{C}$ erzeugte σ-Algebra): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Das System $\sigma(\mathfrak{C})$ aller Mengen $\mathrm{A} \subseteq \Omega$, die in jeder $\mathfrak{C}$ umfassenden σ-Algebra enthalten sind, heißt die *von $\mathfrak{C}$ erzeugte σ-Algebra*. Umgekehrt heißt $\mathfrak{C}$ ein *Erzeugendensystem für $\sigma(\mathfrak{C})$*.

$*$ Man beweist, daß $\sigma(\mathfrak{C})$ selbst eine $\mathfrak{C}$ umfassende σ-Algebra bildet, und zwar die bezüglich Inklusion kleinste.

Definition 3 (Lebesguesche Nullmenge): Eine Menge $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}^m$ heißt *m-dimensionale Lebesguesche Nullmenge*, wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine höchstens abzählbare Überdeckung von N mit abgeschlossenen m-dimensionalen Würfeln (bzw. abgeschlossenen Quadern oder Kugeln) finden kann, so daß die Summe ihrer m-dimensionalen Elementarinhalte kleiner als ε ausfällt.

$*$ Beispiele: alle endlichen und abzählbar unendlichen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ (z. B. $\mathbb{Q}^m$), Graphen stetiger Funktionen $f\colon \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Definitionsbereich $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{m-1}$ ([Elstrodt 96], p. 69 f., Aufgabe 7.6.), Teilmengen von Nullmengen, abzählbare Vereinigungen von Nullmengen.
$*$ Eine m-dimensionale Lebesguesche Nullmenge $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}^m$ werde mit einer Schar paralleler Geraden geschnitten. Dann sind λ^{m-1}-fast alle Schnitte eindimensionale Nullmengen ([Dieudonné 75], p. 232, Satz 13.21.5.).

Definition 4 (Borelsche und Lebesguesche Mengen):
1) Die vom System aller kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}^m$ heißt *System der Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^m$*. Die in $\mathfrak{B}^m$ enthaltenen Mengen heißen auch *meßbare Mengen*.
2) Die von den Borelschen Mengen und dem System aller m-dimensionalen Lebesgueschen Nullmengen des $\mathbb{R}^m$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{L}^m$ heißt *System der Lebesgueschen Mengen des $\mathbb{R}^m$*.
3) Sei $\Omega \in \mathfrak{B}^m$. Die vom System aller kompakten Teilmengen von Ω erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}_\Omega$ heißt *System der Borelschen Mengen von Ω*.
4) Sei $\Omega \in \mathfrak{B}^m$. Die von $\mathfrak{B}_\Omega$ und dem System aller in Ω enthaltenen m-dimensionalen Lebesgueschen Nullmengen erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{L}_\Omega$ heißt *System der Lebesgueschen Mengen von Ω*.

$*$ Die Inklusionen $\mathfrak{B}^m \subset \mathfrak{L}^m \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^m)$ sind streng; insbesondere gibt es Teilmengen des $\mathbb{R}^m$, die keine Lebesgueschen Mengen sind.

Satz 5 (Erzeugendensysteme für $\mathfrak{B}^m$ und $\mathfrak{B}_\Omega$):
1) ([ELSTRODT 96], p. 19, Satz 4.3) *Jedes der folgenden Mengensysteme erzeugt die σ-Algebra der Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^m$:*
das System aller offenen Quader $\mathrm{A} = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_m, b_m)$*;*
das System aller halboffenen Quader $\mathrm{A} = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_m, b_m]$*;*
das System aller abgeschlossenen Quader $\mathrm{A} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ *zuzüglich* $\emptyset$*;*
das System aller offenen Mengen;
das System aller abgeschlossenen Mengen.
Außerdem sind alle genannten Systeme abgeschlossen unter der Bildung endlicher Durchschnitte.

2) ([ELSTRODT 96], p. 19, Korollar 4.5.) *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, so entsteht aus jedem der unter 1) genannten Erzeugendensysteme $\mathfrak{C}$ für $\mathfrak{B}^m$ ein Erzeugendensystem $\mathfrak{C}_\Omega = \{ \mathrm{A} \cap \Omega \mid \mathrm{A} \in \mathfrak{C} \}$ für $\mathfrak{B}_\Omega$. Außerdem sind alle Systeme $\mathfrak{C}_\Omega$ abgeschlossen unter der Bildung endlicher Durchschnitte.*

∗ Konventionen für die Intervalle: $(a, a) := \emptyset$, $(a, a] := \emptyset$, $[a, a] := \{a\}$.
∗ Insbesondere haben die Borelschen bzw. Lebesgueschen Mengen von Ω die Darstellung $\mathfrak{B}_\Omega = \{ \mathrm{A} \cap \Omega \mid \mathrm{A} \in \mathfrak{B}^m \}$ bzw. $\mathfrak{L}_\Omega = \{ \mathrm{A} \cap \Omega \mid \mathrm{A} \in \mathfrak{L}^m \}$.

Definition 6 (quadrierbare Mengen): ([ELSTRODT 96], p. 69, Aufgabe 7.6.; vergleiche [CARATHÉODORY 68], p. 289 f. und 298) Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *Jordan-meßbar* oder *quadrierbar*, wenn sie beschränkt ist und $\partial\Omega$ eine (m-dimensionale) Lebesguesche Nullmenge bildet.

∗ Beispiele: offene, halboffene und abgeschlossene Quader, Kugeln, beschränkte konvexe Mengen ([ELSTRODT 96], p. 68, Satz 7.7.), Lipschitzgebiete im strengen Sinne (Rand ist aus endlich vielen Graphen von Lipschitzfunktionen zusammengesetzt).

Satz 7 (Ring der quadrierbaren Mengen): ([ELSTRODT 96], p. 69, 7.6.) *Das System der quadrierbaren Mengen im $\mathbb{R}^m$ ist ein Mengenring, jedoch keine σ-Algebra.*

b) Maße und ihre grundlegenden Eigenschaften.

Definition 8 (Maß als nichtnegative Mengenfunktion): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{ (+\infty) \}$ heißt *Maß*, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ gilt, μ nichtnegative Werte annimmt und σ-additiv ist: für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $\{ \mathrm{A}_i \}$, $\mathfrak{A}$ gilt: $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty \mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(\mathrm{A}_i)$.

Definition 9 (meßbarer Raum, Maßraum, vollständiger Maßraum): Ein Paar $[\Omega, \mathfrak{A}]$ aus Grundmenge und σ-Algebra heißt *meßbarer Raum*; ein Tripel $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ aus Grundmenge, σ-Algebra und Maß heißt *Maßraum*. Ein Maßraum heißt *vollständig* (bezüglich Nullmengen von μ), wenn mit jeder μ-Nullmenge $\mathrm{N} \in \mathfrak{A}$ sämtliche Teilmengen von N zu $\mathfrak{A}$ gehören (vergleiche [ELSTRODT 96], p. 63 ff.).

∗ In der Literatur ist auch von "vollständigen Maßen" die Rede.
∗ Beispiel: Bezeichnet λ^m das m-dimensionale Lebesguesche Maß, so ist der Maßraum $[\mathbb{R}^m, \mathfrak{L}^m, \lambda^m]$ vollständig, $[\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m, \lambda^m]$ dagegen nicht.

Satz 10 (Eindeutigkeitssatz): ([ELSTRODT 96], p. 60, Satz 5.6.) $[\Omega, \mathfrak{A}]$ *sei ein meßbarer Raum, und die σ-Algebra $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{C})$ werde von einem Mengensystem $\mathfrak{C}$ erzeugt, das unter der Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Weiter seien zwei σ-finite Maße μ_1, μ_2 auf $\mathfrak{A}$ gegeben (siehe Definition 12 unten). Wenn a) beide Maße auf $\mathfrak{C}$ übereinstimmen, und b) eine höchstens abzählbare Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Mengen Ω_i mit $\Omega_i \in \mathfrak{C}$ und $\mu_1(\Omega_i) = \mu_2(\Omega_i) < \infty$ existiert, dann stimmen die Maße μ_1 und μ_2 auf $\mathfrak{A}$ überein.*

∗ Für finite Maße genügt Eigenschaft a).
∗ Beispiel: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ abgeschlossen, so sind zwei Maße auf $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$ schon dann identisch, wenn ihre Werte auf allen Mengen der Gestalt $(a, b) \cap \Omega$, $(a, b] \cap \Omega$ oder $[a, b] \cap \Omega$ übereinstimmen.

Definition 11 (Menge, auf die ein Maß konzentriert ist): Sei $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,,\,\mu\,]$ ein Maßraum. Wir sagen, daß das Maß μ *auf die Menge* $\mathrm{C} \in \mathfrak{A}$ *konzentriert ist*, wenn $\Omega \setminus \mathrm{C}$ eine μ-Nullmenge ist: $\mu(\Omega \setminus \mathrm{C}) = 0$.

$*$ Die topologischen Eigenschaften einer Menge, auf die ein Maß konzentriert ist, werden durch diese Definition nicht näher bestimmt!

Definition 12 (algebraische Eigenschaften von Maßen): Sei $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ ein meßbarer Raum.
1) Ein Maß μ heißt *finit* oder *endlich*, wenn $\mu(\Omega) < \infty$.
2) Ein Maß mit $\mu(\Omega) = (+\infty)$ heißt σ*-finit* oder σ*-endlich*, wenn eine höchstens abzählbare Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Mengen Ω_i mit $\Omega_i \in \mathfrak{A}$ und $\mu(\Omega_i) < \infty$ existiert.
3) ([Dieudonné 75] , p. 215) Ein Maß μ heißt *atomar*, wenn es auf eine höchstens abzählbare Menge $\mathrm{C} \in \mathfrak{A}$ konzentriert ist.
4) ([Dieudonné 75] , p. 215) Die σ-Algebra $\mathfrak{A}$ möge alle einpunktigen Mengen $\{\,t\,\}$, $t \in \Omega$, enthalten. Ein Maß μ heißt *diffus*, wenn alle einpunktigen Mengen μ-Nullmengen sind: $\mu(\,\{\,t\,\}\,) = 0$ für alle $t \in \Omega$.

$*$ Die Eigenschaften 1) – 4) bleiben bei nichtnegativen Linearkombinationen erhalten.
$*$ Ein atomares Maß kann wie folgt mit Hilfe von Diracmaßen dargestellt werden: $\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{t_i}(\mathrm{A})$.

Definition 13 (Relationen zwischen zwei Maßen): Auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ seien zwei Maße λ und μ gegeben.
1) Das Maß μ heißt λ*-absolutstetig*, wenn jede λ-Nullmenge auch eine μ-Nullmenge ist (bzw. das System der μ-Nullmengen das System der λ-Nullmengen umfaßt). Schreibweise: $\mu \ll \lambda$.
2) Das Maß μ heißt λ*-singulär*, wenn μ auf eine λ-Nullmenge konzentriert ist. Schreibweise: $\mu \perp \lambda$.

$*$ Absolutstetigkeit und die Schreibweise $\mu \ll \lambda$ sind nicht zu verwechseln mit der Relation $\mu \leqslant \lambda \iff \mu(\mathrm{A}) \leqslant \lambda(\mathrm{A})\ \forall\, \mathrm{A} \in \mathfrak{A}$.
$*$ Die Relation $\mu \ll \lambda$ ist reflexiv und transitiv: $\mu \ll \mu$; aus $\mu \ll \lambda$ und $\lambda \ll \kappa$ folgt $\mu \ll \kappa$.
$*$ Die Relation $\mu \perp \lambda$ ist symmetrisch: Ist μ auf die λ-Nullmenge N konzentriert, so ist λ auf die μ-Nullmenge $\Omega \setminus \mathrm{N}$ konzentriert. In der Literatur findet man dafür auch den Begriff "λ und μ sind disjunkt".

Satz 14 (Rechenregeln für Absolutstetigkeit/Singularität): *Auf dem meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ *seien Maße* λ*,* μ *und* κ *gegeben.*
1) ([Halmos 50] , p. 127, (6)) *Stets gilt:* $\mu \ll \mu + \kappa$.
2) ([Halmos 50] , p. 127, (9)) *Aus* $\mu \ll \lambda$ *und* $\mu \perp \lambda$ *folgt:* $\mu = \mathfrak{o}$.
3) Aus $\mu \ll \lambda$ *und* $\kappa \ll \lambda$ *folgt* $(\mu + \kappa) \ll \lambda$.
4) ([Halmos 50] , p. 127, (10)) λ*,* μ *und* κ *seien finite Maße. Aus* $\mu \perp \lambda$ *und* $\kappa \perp \lambda$ *folgt dann* $(\mu + \kappa) \perp \lambda$.

Satz 15 (ε-δ-Formulierung der Absolutstetigkeit): ([Dunford/Schwartz 88] , p. 131, Definition 12 und Lemma 13) *Auf dem meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ *seien zwei Maße* λ *und* μ *gegeben.* μ *sei finit. Dann folgt:*

$$\mu \text{ ist } \lambda\text{-absolutstetig} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall\, \mathrm{A} \in \mathfrak{A} :\ \lambda(\mathrm{A}) \leqslant \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \mu(\mathrm{A}) \leqslant \varepsilon\,.$$

Satz 16 (Satz von Radon-Nikodym, Existenz der Dichte): ([Dunford/Schwartz 88] , p. 176, Theorem 2) *Auf dem meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ *seien zwei Maße* λ *und* μ *gegeben.* λ *sei* σ*-finit,* μ *sei finit und* λ*-absolutstetig. Dann existiert eine (als Äquivalenzklasse eindeutig bestimmte) Funktion* $f \in L^1(\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,,\,\lambda\,)$ *mit*

$$\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(t)\, d\lambda(t) \quad \forall\, \mathrm{A} \in \mathfrak{A} \quad \textit{und} \quad \mu(\Omega) = \|\, f \,\|_{L^1(\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,,\,\lambda\,)}\,.$$

Außerdem besitzt f *einen nichtnegativen Repräsentanten.*

c) Kanonische Zerlegungen unsignierter Maße.

Satz 17 (Lebesguesche Zerlegung): ([Halmos 50] , p. 134, Theorem C) *Auf dem meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ *seien zwei Maße* λ *und* μ *gegeben, die beide* σ*-finit sind. Dann besteht eine eindeutig bestimmte Zerlegung* $\mu = \mu_{abs} + \mu_{sing}$ *in ein* σ*-finites,* λ*-absolutstetiges Maß* $\mu_{abs} \ll \lambda$ *und ein* σ*-finites,* λ*-singuläres Maß* $\mu_{sing} \perp \lambda$ *mit (offensichtlich)* $\mu_{abs} \perp \mu_{sing}$.

Satz 18 (Zerlegung in atomaren und diffusen Anteil): ([Dieudonné 75] , p. 216, Satz 13.18.6., zusammen mit [Elstrodt 96] , p. 65 f. Aufgabe 6.3. f)) *Gegeben sei ein meßbarer Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ *, wobei* $\mathfrak{A}$ *alle einpunktigen Mengen* $\{\,t\,\}$*,* $t \in \Omega$*, enthält. Dann gestattet jedes* σ*-finite Maß* μ *eine eindeutig bestimmte Zerlegung* $\mu = \mu_{at} + \mu_{diff}$ *in ein* σ*-finites, atomares Maß* μ_{at} *und ein* σ*-finites, diffuses Maß* μ_{diff} *mit* $\mu_{at} \perp \mu_{diff}$.

Satz 19 (Anteile eines Maßes auf $[\,\mathbb{R}^m\,,\,\mathfrak{B}^m\,]$ **bzw.** $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$**):** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *sei abgeschlossen, und* λ^m *bezeichne das* m*-dimensionale Lebesguesche Maß. Jedes* σ*-finite Maß* μ *auf* $[\,\mathbb{R}^m\,,\,\mathfrak{B}^m\,]$ *bzw.* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ *gestattet eine eindeutige Zerlegung* $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ *in paarweise disjunkte* σ*-finite Anteile, wobei* μ_1 *ein* λ^m*-absolutstetiges Maß,* μ_2 *ein* λ^m*-singuläres atomares Maß und* μ_3 *ein* λ^m*-singuläres diffuses Maß ist. Dabei ist* μ_2 *auf eine höchstens abzählbare Lebesguesche Nullmenge* N_2 *und* μ_3 *auf eine überabzählbare Lebesguesche Nullmenge* N_3 *konzentriert.*

d) Reguläre Maße.

Definition 20 (reguläres Maß, Borelmaß, Radonmaß): Wir betrachten den meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ mit einer abgeschlossenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ (eventuell $\Omega = \mathbb{R}^m$).
1) ([Elstrodt 96] , p. 310, Definition 1.1. b), c))
Ein Maß μ auf $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ heißt *regulär*, wenn für jedes $\mathrm{A} \in \mathfrak{B}_\Omega$ gilt:

$$\sup\{\,\mu(\mathrm{A}') \mid \mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A}\,,\quad \mathrm{A}' \text{ kompakt}\,\} \;=\; \mu(\mathrm{A}) \;=\; \inf\{\,\mu(\mathrm{A}'') \mid \mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}''\,,\quad \mathrm{A}'' \text{ offen}\,\}\,.$$

2) ([Halmos 50] , p. 223; [Elstrodt 96] , p. 310, Definition 1.1. a), zusammen mit p. 311, Folgerung 1.2. c))
Ein *Borelmaß* auf $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ ist ein Maß, das allen kompakten Teilmengen von Ω endliche Werte erteilt.
3) [Elstrodt 96] , p. 310, Definition 1.1. e), zusammen mit p. 316, Korollar 1.13.)
Ein *Radonmaß* auf $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ ist ein reguläres Borelmaß.

$*$ Die Eigenschaften 1) – 3) bleiben bei nichtnegativen Linearkombinationen erhalten.
$*$ Die Definitionen sind an die speziellen topologischen Eigenschaften des meßbaren Raumes $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ angepaßt.
$*$ Auf $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, seien Maße mit $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$ gegeben. Sind zwei davon Radonmaße, so auch das dritte.

Satz 21 (ε-Formulierung der Regularität): ([Elstrodt 96] , p. 311, Folgerung 1.2. a)) *Wir betrachten den meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ *mit einer abgeschlossenen Menge* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *(eventuell* $\Omega = \mathbb{R}^m$*). Wenn das Maß* μ *regulär ist, so kann man zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und jedem* $\mathrm{A} \in \mathfrak{B}_\Omega$ *mit* $\mu(\mathrm{A}) < \infty$ *eine abgeschlossene (sogar kompakte) Menge* A' *und eine offene Menge* A'' *mit* $\mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}'' \subseteq \Omega$ *und* $\mu(\mathrm{A}'' \setminus \mathrm{A}') \leqslant \varepsilon$ *finden.*

Satz 22 (Variante des Satzes von Ulam): ([Elstrodt 96] , p. 317, Satz 1.16.) *Wir betrachten den meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ *mit einer abgeschlossenen Menge* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *(eventuell* $\Omega = \mathbb{R}^m$*). Dann ist jedes Borelmaß ein Radonmaß (also schon jedes Maß* μ*, das allen kompakten Teilmengen von* Ω *endliche Werte erteilt, regulär).*

$*$ Da jede abgeschlossene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen dargestellt werden kann, ist jedes Radonmaß notwendig σ-finit. Aus dem Satz ergibt sich, daß umgekehrt alle finiten Maße auf $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ Radonmaße sind.

Definition 23 (Träger eines Radonmaßes): ([ELSTRODT 96], p. 339, Abschnitt 5.) Der *Träger* $\operatorname{supp}(\mu)$ *eines Radonmaßes* ist das Komplement der bezüglich Inklusion größten offenen μ-Nullmenge (also eine abgeschlossene Menge und in $\mathfrak{B}_\Omega$ enthalten).

Satz 24 (Erhalt der Regularität bei den kanonischen Zerlegungen): *Wir betrachten den meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ *mit einer abgeschlossenen Menge* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *(eventuell* $\Omega = \mathbb{R}^m$*).*
Gegeben seien ein σ-finites Maß λ und ein σ-finites Radonmaß μ. Dann sind die Anteile μ_{abs} und μ_{sing} bzw. μ_{at} und μ_{diff} bei den Zerlegungen gemäß Satz 17 und 18 ebenfalls Radonmaße.

Beweis: Nach Satz 22 sind die Anteile schon Radonmaße, wenn sie allen kompakten Teilmengen von Ω endliche Werte erteilen. Dies folgt jedoch aus $\mu(\mathrm{A}) = \mu_{abs}(\mathrm{A}) + \mu_{sing}(\mathrm{A}) = \mu_{at}(\mathrm{A}) + \mu_{diff}(\mathrm{A}) < \infty$, weil alle Summanden nichtnegativ sind. ■

$*$ Die disjunkten Anteile μ_{abs} und μ_{sing} bzw. μ_{at} und μ_{diff} sind zwar auf disjunkte Mengen konzentriert, aber ihre Träger sind nicht notwendig disjunkt.

e) Signierte Maße.

Definition 25 (signiertes Maß): ([ELSTRODT 96], p. 267 f., Definition 1.1.) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Mengenfunktion $\nu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\,(-\infty)\,,\,(+\infty)\,\}$ heißt *signiertes Maß*, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ gilt, μ höchstens einen der Werte $(-\infty)$, $(+\infty)$ annimmt und σ-additiv ist.

Satz 26 (Hahnsche Zerlegung von Ω zu signiertem Maß): ([ELSTRODT 96], p. 269, Satz 1.8.) *Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum* $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$*. Dann gestattet Ω eine disjunkte Zerlegung $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, in Mengen Ω^+, $\Omega^- \in \mathfrak{A}$, so daß für alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ gilt: $\nu(\mathrm{A} \cap \Omega^+) \geqslant 0$ und $\nu(\mathrm{A} \cap \Omega^-) \leqslant 0$.*

Definition 27 (positiver und negativer Anteil, Totalvariation): Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$.
1) Der *positive Anteil* bzw. die *positive Variation von ν* ist definiert durch $\nu^+(\mathrm{A}) = \sup\{\,\nu(\mathrm{A}') \mid \mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A}\,,\ \mathrm{A}' \in \mathfrak{A}\,\}$.
2) Der *negative Anteil* bzw. die *negative Variation von ν* ist definiert durch $\nu^-(\mathrm{A}) = -\inf\{\,\nu(\mathrm{A}') \mid \mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A}\,,\ \mathrm{A}' \in \mathfrak{A}\,\}$.
3) Die *Totalvariation von ν* ist definiert als $\vee\nu = \nu^+ + \nu^-$.

$*$ Die Totalvariation kann auch wie folgt dargestellt werden ([ELSTRODT 96], p. 271, Satz 1.9.): $\vee\nu(\mathrm{A}) = \sup\{\,\sum_{i=1}^\infty |\,\nu(\mathrm{A}_i)\,| \mid \mathrm{A}_i \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt, $\bigcup_{i=1}^\infty \mathrm{A}_i = \mathrm{A}\,\}$.
$*$ ν^+, ν^- und $\vee\nu$ sind nichtnegative Maße; überdies muß eines der beiden Maße ν^+, ν^- finit sein ([DUNFORD/SCHWARTZ 88], p. 130, Corollary 11).
$*$ In der Literatur wird auch die Eigenschaft aus Satz 33, 1) zur Definition von ν^+ bzw. ν^- benutzt, während die Eigenschaften aus Definition 27, 1) und 2) zu Beweistatsachen werden.

Definition 28 (Nullmenge für ein signiertes Maß): ([ELSTRODT 96], p. 269, Definition 1.6.) Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$. Dann heißt $\mathrm{N} \in \mathfrak{A}$ eine ν-Nullmenge, wenn $\nu(\mathrm{N}') = 0$ für alle $\mathrm{N}' \subseteq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}' \in \mathfrak{A}$.

$*$ Gleichwertig ist: $\mathrm{N} \in \mathfrak{A}$ ist ν-Nullmenge $\iff \vee\nu(\mathrm{N}) = 0$.
$*$ Damit steht auch der Begriff zur Verfügung, daß ein signiertes Maß auf eine Menge $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ konzentriert ist: das Komplement $\Omega \setminus \mathrm{A}$ muß eine ν-Nullmenge sein.

Definition 29 (Eigenschaften signierter Maße):
1) Ein signiertes Maß ν auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ heißt *finit*, *σ-finit*, *atomar* bzw. *diffus*, wenn beide Anteile ν^+ und ν^- die jeweiligen Eigenschaften besitzen.
2) ([ELSTRODT 96], p. 342, Folgerung 2.22. b)) Ein signiertes, finites Maß ν auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ mit abgeschlossenem $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *regulär*, wenn beide Anteile ν^+ und ν^- regulär sind.
$*$ Signierte, finite, reguläre Maße auf $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{B}_\Omega\,]$ mit abgeschlossenem $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ werden in der Literatur ebenfalls als Radonmaße bezeichnet (vergleiche Satz 38 unten).
$*$ Gleichwertig zu Definition 29, 2): Wenn das signierte, finite Maß ν regulär ist, so kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\mathrm{A} \in \mathfrak{B}_\Omega$ eine abgeschlossene (sogar kompakte) Menge A' und eine offene Menge A'' mit $\mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}'' \subseteq \Omega$ und $\vee\nu(\mathrm{A}'' \setminus \mathrm{A}') \leqslant \varepsilon$ finden (vergleiche [DUNFORD/SCHWARTZ 88], p. 137, Definition 11 und Lemma 12).

Definition 30 (Relationen zwischen signierten Maßen): Für signierte Maße ν_1, ν_2 werden die Relationen $\nu_1 \ll \nu_2$ und $\nu_1 \perp \nu_2$ wie in Definition 13 erklärt, wobei aber ν_i-Nullmengen im Sinne von Definition 28 zu verstehen sind.

Satz 31 (Absolutstetigkeit signierter Maße): ([HALMOS 50], p. 125, Theorem A)
Für signierte Maße ν_1, ν_2 gilt:

$$\nu_1 \ll \nu_2 \iff \vee\nu_1 \ll \vee\nu_2 \iff \nu_1^+ \ll \nu_2 \text{ und } \nu_1^- \ll \nu_2\,.$$

Satz 32 (Satz von Radon-Nikodym für signierte Maße, Existenz der Dichte): ([DUNFORD/SCHWARTZ 88], p. 176, Theorem 2; vergleiche Satz 16) *Auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ seien ein nichtnegatives Maß λ und ein signiertes Maß ν gegeben. λ sei σ-finit, ν sei finit und λ-absolutstetig. Dann existiert eine (als Äquivalenzklasse eindeutig bestimmte) Funktion $f \in L^1(\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,,\,\lambda\,)$ mit*

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(t)\,d\lambda(t) \quad \forall\,\mathrm{A} \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \vee\,\nu(\Omega) = \|\,f\,\|_{L^1(\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,,\,\lambda\,)}\,.$$

$*$ Die gleiche Aussage gilt, wenn λ ein signiertes, finites Maß ist ([DUNFORD/SCHWARTZ 88], p. 181, Theorem 7).

f) Kanonische Zerlegungen signierter Maße.

Satz 33 (Jordansche Zerlegung eines signierten Maßes): *Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$. Weiter mögen Ω^+ und Ω^- eine Hahnsche Zerlegung von Ω bezüglich ν bilden. Dann gilt:*
1) $\nu^+(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A} \cap \Omega^+)$ und $\nu^-(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A} \cap \Omega^-)$. Also ist ν^+ auf Ω^+ konzentriert, ν^- ist auf Ω^- konzentriert, und es gilt $\nu^+ \perp \nu^-$.
2) ([ELSTRODT 96], p. 271, Satz 1.12.) *Für alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ gilt $\nu(\mathrm{A}) = \nu^+(\mathrm{A}) - \nu^-(\mathrm{A})$. Die Anteile sind minimal in dem Sinne, daß für jede andere Zerlegung $\nu = \nu' - \nu''$ in nichtnegative Maße, von denen mindestens eines finit ist, die Ungleichungen $\nu^+ \leqslant \nu'$ und $\nu^- \leqslant \nu''$ gelten.*

Satz 34 (Lebesguesche Zerlegung signierter Maße): ([ELSTRODT 96], p. 283, Satz 2.6., vergleiche Satz 17) *Auf dem meßbaren Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$ seien ein σ-finites, nichtnegatives Maß λ und ein σ-finites signiertes Maß ν gegeben. Dann besteht eine eindeutig bestimmte Zerlegung $\nu = \nu_{abs} + \nu_{sing}$ in ein signiertes, σ-finites, λ-absolutstetiges Maß $\nu_{abs} \ll \lambda$ und ein signiertes, σ-finites, λ-singuläres Maß $\nu_{sing} \perp \lambda$ mit (offensichtlich) $\nu_{abs} \perp \nu_{sing}$.*

Satz 35 (Zerlegung signierter Maße in atomaren und diffusen Anteil): (vergleiche Satz 18) *Gegeben sei ein meßbarer Raum $[\,\Omega\,,\,\mathfrak{A}\,]$, wobei $\mathfrak{A}$ alle einpunktigen Mengen $\{\,t\,\}$, $t \in \Omega$, enthält. Dann gestattet jedes signierte, σ-finite Maß ν eine eindeutig bestimmte Zerlegung $\nu = \nu_{at} + \nu_{diff}$ in ein signiertes, σ-finites, atomares Maß ν_{at} und ein σ-finites, diffuses Maß ν_{diff} mit $\nu_{at} \perp \nu_{diff}$.*

Beweis: Wende auf ν Satz 33 und auf die Anteile ν^+, ν^- Satz 18 an. ∎

Satz 36 (Anteile eines signierten Maßes auf $[\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m]$ bzw. $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$): *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ sei abgeschlossen, und λ^m bezeichne das m-dimensionale Lebesguesche Maß. Jedes signierte, σ-finite Maß ν auf $[\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m]$ bzw. $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$ gestattet eine eindeutige Zerlegung $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ in paarweise disjunkte σ-finite Anteile, wobei ν_1 ein signiertes, λ^m-absolutstetiges Maß, ν_2 ein signiertes, λ^m-singuläres, atomares Maß und ν_3 ein signiertes, λ^m-singuläres, diffuses Maß ist. Dabei ist ν_2 auf eine höchstens abzählbare Lebesguesche Nullmenge N_2 und ν_3 auf eine überabzählbare Lebesguesche Nullmenge N_3 konzentriert. Die drei Anteile können jeweils in positive und negative Anteile mit denselben Eigenschaften zerlegt werden.*

g) Banachräume von Mengenfunktionen.

Definition 37 (Räume *ca* und *rca*): ([Dunford/Schwartz 88], p. 161 f.)
1) Die Menge aller signierten, finiten Maße auf dem meßbaren Raum $[\Omega, \mathfrak{A}]$ bildet zusammen mit der Norm $\|\nu\| := \vee\nu(\Omega)$ einen Banachraum, der mit $ca(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet wird.
2) Die Menge aller signierten, finiten, regulären Maße auf $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ sei abgeschlossen) bildet zusammen mit der Norm $\|\nu\| := \vee\nu(\Omega)$ einen Banachraum, der mit $rca(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ bezeichnet wird.

Satz 38 (Satz von Riesz für kompaktes Ω): ([Dunford/Schwartz 88], p. 265, Theorem 3) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Dann sind die Räume $\big(C^0(\Omega)\big)^*$ und $rca(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ isomorph und isometrisch; jedes lineare, stetige Funktional g kann durch Integration bezüglich eines eindeutig bestimmten Radonmaßes ν dargestellt werden:*

$$\langle g, f \rangle = \int_\Omega f(t)\, d\nu(t) \quad \forall f \in C^0(\Omega).$$

Insbesondere gilt $\|g\|_{(C^0)^*} = \|\nu\|_{rca}$. Außerdem erhält der Isomorphismus die Ordnungsstruktur: $\mathfrak{o} \leqslant g_1 \leqslant g_2 \iff \mathfrak{o} \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2$.

Satz 39 (Satz von Riesz für abgeschlossenes, unbeschränktes Ω): ([Elstrodt 96], p. 346, Theorem 2.26.) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen. Dann sind die Räume $\big(C_0^0(\Omega)\big)^*$ und $rca(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ isomorph und isometrisch; jedes lineare, stetige Funktional g kann durch Integration bezüglich eines eindeutig bestimmten Radonmaßes ν dargestellt werden:*

$$\langle g, f \rangle = \int_\Omega f(t)\, d\nu(t) \quad \forall f \in C_0^0(\Omega).$$

Insbesondere gilt $\|g\|_{(C_0^0)^*} = \|\nu\|_{rca}$. Außerdem erhält der Isomorphismus die Ordnungsstruktur: $\mathfrak{o} \leqslant g_1 \leqslant g_2 \iff \mathfrak{o} \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2$.

Satz 40 (Äquivalenz absolutstetiger Maße und ihrer Dichten): *Auf dem meßbaren Raum $[\Omega, \mathfrak{A}]$ sei ein nichtnegatives, σ-finites Maß λ gegeben. Dann sind der Äquivalenzklassenraum $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ und der Untervektorraum $\{\nu \in ca(\Omega, \mathfrak{A}) \mid \nu \ll \lambda\}$ isomorph und isometrisch, wobei die Zuordnung vermittelt wird durch*

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A} f(t)\, d\lambda(t) \quad \forall \mathrm{A} \in \mathfrak{A}.$$

Beweis: Folgt aus Satz 32 und der Tatsache, daß umgekehrt $\int_\mathrm{A} f(t)\, d\lambda(t)$ ein signiertes, finites Maß definiert ([Dunford/Schwartz 88], p. 152, Corollary 18). ∎

Literaturverzeichnis.

1. [Carathéodory 68] Carathéodory, C.: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Chelsea; New York 1968, 3. Aufl.
2. [Dieudonné 75] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis. Band 2.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1975
3. [Dunford/Schwartz 88] Dunford, N.; Schwartz, J. T.: *Linear Operators. Part I: General Theory.* Wiley-Interscience; New York 1988, 2. Aufl.
4. [Elstrodt 96] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer; Berlin etc. 1996
5. [Halmos 50] Halmos, P. R.: *Measure Theory.* Springer; New York etc. 1950

Zuletzt geändert: 12. 04. 2007

Anschrift des Verfassers: Marcus Wagner, BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus. Homepage / e-mail: www.thecitytocome.de / wagner@math.tu-cottbus.de