



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Anwendung optimaler Steuerungsprobleme mit L^∞ -Steuerbeschränkung auf ein Modellproblem der Bildverarbeitung

Diplomarbeit

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

vorgelegt von
Lucas Franek

Betreuer:
Prof. Dr. H. Maurer
PD Dr. M. Wagner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Problemstellung und mathematische Grundlagen	4
2.1 Die Modellierung des Problems – Bildstörungen	4
2.2 Schlecht gestellte Probleme	5
2.3 Funktionenräume	6
2.4 Repräsentation von Bildern – Diskretes und kontinuierliches Bildmodell	8
2.4.1 Diskretes Bildmodell	8
2.4.2 Kontinuierliches Bildmodell - geeignete Funktionenräume	11
2.4.3 Übergänge zwischen den Modellen	12
3 Variationsprobleme und Probleme der optimalen Steuerung	14
3.1 Variationsprobleme	14
3.1.1 Existenzsätze	15
3.1.2 Notwendige Optimalitätsbedingungen	16
3.2 Probleme der optimalen Steuerung	18
3.2.1 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip für mehrdimensionale Steuerungsprobleme	19
4 Variationsmethoden in der Bildverarbeitung	21
4.1 Der Variationsansatz zur Lösung des image-restoration-Problems	21
4.1.1 Herleitung des Variationsansatzes	21
4.1.2 Die Wahl der Potentialfunktion f	23
4.1.3 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung	24
4.1.4 Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen	26
4.2 Das Kantenerkennungsfunktional	27
4.3 Fallstudie: Impulsrauschen	29
4.3.1 Impulsrauschen in der Forschung	29
4.3.2 Entzerrung und Impulsrauschen – L^1 -Datenterm und Mumford-Shah-Regularisierungsterm	32
4.4 Steuerung und Steuerbeschränkung im Variationsansatz	33
4.5 L^∞ -Steuerbeschränkung und „rotating mask“	35
4.5.1 Modellierung für kontinuierliche Bilder	35
4.5.2 Modellierung für diskrete Bilder	36
5 Numerische Verfahren – Minimierungsmethoden	41
5.1 Diskretisierungsschemata	41
5.2 Indirekte Verfahren	42
5.2.1 Gradientenabstiegsverfahren	43
5.2.2 Fixpunktiteration	44
5.2.3 Herleitung eines iterativen Schemas für das Kantenerkennungsfunktional	45

5.3	Direkte Verfahren	47
5.4	Nichtlineare Optimierungsprobleme – Notwendige Optimalitätsbedingungen	49
5.5	Innere-Punkt-Verfahren – IPOPT und LOQO	50
6	Numerische Resultate	53
6.1	Bewertungsmaßstäbe für die Ergebnisse	53
6.2	Kantenerkennung	55
6.3	Quadratische und TV-Regularisierung	62
6.4	Steuerungsproblem mit L^∞ -Steuerbeschränkung	63
6.5	Steuerungsprobleme mit rotating mask	75
6.5.1	Der eindimensionale Fall: Anwendung auf Signale	75
6.5.2	Der zweidimensionale Fall	76
6.5.3	Fallbeispiel: Struktur mit kleinen Variationen und Salt-and-Pepper-Rauschen	79
6.5.4	Lena-Testbild	82
6.6	Diskussion der Resultate	86
7	Zusammenfassung und Ausblick	87
A	Beispiel eines AMPL-Programms	89
B	Tabellen	92
	Danksagung	100
	Eidesstattliche Erklärung	101
	Abbildungsverzeichnis	102
	Literaturverzeichnis	104