Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Kurs "Variationsrechnung" (HS 2003/04)

Auszug aus der Vorlesung: Satz von Liouville

C) Geometrie im Phasenraum.

Definition 35: *1) Der Raum* $\mathbb{R}^{2n}$ *mit den Koordinaten* $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *heißt* ***Phasenraum*** *zu* $(\mathrm{P}_2)^{**}$ *bzw.* $(\mathrm{P}_2)^{**}(\hat{\boldsymbol{x}})$.
2) Sei $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})$ *eine allgemeine Lösung des Systems der kanonischen Gleichungen in* $(\mathrm{P}_2)^{**}$ *und* $t_0 \in (a, b)$. *Dann heißt die Familie der Abbildungen* $\{ g^t \}_{a \leqslant t \leqslant b}$ *mit* $g^t \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *gemäß* $g^t(\xi, \eta) = (\hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{p}}(t))$ *mit* $\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \xi$ *und* $\hat{\boldsymbol{p}}(t_0) = \eta$ ***Phasenfluß*** *zu* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})$.

Satz 36: (Liouville) *In* $(\mathrm{P}_2)^{**}$ *sei zusätzlich* $\mathcal{H}(t, \xi, v)$ *von* C^2 *und von* t *unabhängig. Außerdem sei* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}) \in C^{2,n} \times C^{1,n}$ *allgemeine Lösung des Systems der kanonischen Gleichungen. Dann "läßt der Phasenfluß das Volumen im Phasenraum invariant", d. h. präzise: Ist* $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ *ein Lipschitzgebiet im strengen Sinne, und ist* $\mathrm{G}^t = g^t(\mathrm{G}) := \{ g^t(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in \mathrm{G} \}$, *so gilt:* $\lambda^{2n}(\mathrm{G}^t) = \lambda^{2n}(\mathrm{G})$ *für alle* $t \in [a, b]$.

Beweis: Sei $t_0 \in (a, b)$ gegeben. Dann ist

$$\lambda^{2n}(\mathrm{G}^t) = \int_{\mathrm{G}^t} 1 \, d\widetilde{\xi}_1 \ldots d\widetilde{\xi}_n \, d\widetilde{\eta}_1 \ldots d\widetilde{\eta}_n = \int_{\mathrm{G}} 1 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \partial g_1^t / \partial \xi_1 & \ldots & \partial g_1^t / \partial \eta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{2n}^t / \partial \xi_1 & \ldots & \partial g_{2n}^t / \partial \eta_n \end{pmatrix} (\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \, .$$

Wir wollen zeigen: $\frac{d}{dt} \lambda^{2n}(\mathrm{G}^t)\big|_{t=t_0} = 0$. Aus dem Satz über Differentiation des Integrals nach einem Parameter folgt: $\frac{d}{dt} \lambda^{2n}(\mathrm{G}^t)\big|_{t=t_0} = \int_{\mathrm{G}} 1 \cdot \frac{d}{dt} \mathrm{Det}\,(\ldots)\big|_{t=t_0} d\xi \, d\eta$, also müssen wir die Jacobimatrix, ihre Determinante und deren Ableitung nach t in $\mathrm{U}(t_0)$ berechnen. Hierzu entwickeln wir:

$$g^t(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{p}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) \\ \hat{\boldsymbol{p}}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}^{\cdot}(t_0) + \boldsymbol{r}(t, t_0) \\ \hat{\boldsymbol{p}}^{\cdot}(t_0) + \boldsymbol{r}(t, t_0) \end{pmatrix} (t - t_0) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_\eta(\xi, \eta) + \boldsymbol{r}(t, t_0) \\ -\mathcal{H}_\xi(\xi, \eta) + \boldsymbol{r}(t, t_0) \end{pmatrix} (t - t_0)$$

(verwendet wurden die Definition von g^t, die kanonischen Gleichungen und Satz 33, 2): $\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{p}}(t))$ ist konstant). Die $\boldsymbol{r}(t, t_0)$ sind Vektoren von Restgliedfunktionen mit der Eigenschaft $\lim_{t \to t_0} r_j(t, t_0) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$. Die Jacobimatrix lautet dann:

$$\begin{pmatrix} 1 + (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\eta_1 \xi_1} + r_1(t, t_0)\big) & 0 + (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\eta_1 \xi_2} + r_1(t, t_0)\big) & \ldots & 0 + (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\eta_1 \eta_n} + r_1(t, t_0)\big) \\ 0 + (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\eta_2 \xi_1} + r_2(t, t_0)\big) & 1 + (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\eta_2 \xi_2} + r_2(t, t_0)\big) & \ldots & 0 + (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\eta_2 \eta_n} + r_2(t, t_0)\big) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 - (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\xi_n \xi_1} - r_{2n}(t, t_0)\big) & 0 - (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\xi_n \xi_2} - r_{2n}(t, t_0)\big) & \ldots & 1 - (t - t_0)\big(\mathcal{H}_{\xi_n \eta_n} - r_{2n}(t, t_0)\big) \end{pmatrix} .$$

Mit $\boldsymbol{H}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\eta_1\xi_1}(\xi,\eta) & \dots & \mathcal{H}_{\eta_1\eta_n}(\xi,\eta)) \\ \vdots & & \vdots \\ -\mathcal{H}_{\xi_n\xi_1}(\xi,\eta) & \dots & -\mathcal{H}_{\xi_n\eta_n}(\xi,\eta) \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{R}(t,t_0) = \begin{pmatrix} r_1(t,t_0) & \dots & r_1(t,t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{2n}(t,t_0) & \dots & r_{2n}(t,t_0) \end{pmatrix}$ können

wir schreiben: $\begin{pmatrix} \partial g_1^t/\partial\xi_1 & \dots & \partial g_1^t/\partial\eta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{2n}^t/\partial\xi_1 & \dots & \partial g_{2n}^t/\partial\eta_n \end{pmatrix}(\xi,\eta) = \boldsymbol{E}_{2n} + (t-t_0)\left(\boldsymbol{H}(\xi,\eta) + \boldsymbol{R}(t,t_0)\right).$

Zur Berechnung der Determinante ziehen wir folgenden Satz heran (siehe Kowalewski, G.: *Einführung in die Determinantentheorie.* De Gruyter; Berlin 1942[3], p. 114 f., Nr. 53):

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\left(\boldsymbol{A}+\lambda\,\boldsymbol{E}_n\right) = \lambda^n + S_1\,\lambda^{n-1} + S_2\,\lambda^{n-2} + \dots + S_{n-1}\,\lambda^1 + S_n\,,$$

wobei S_k jeweils die Summe aller k-reihigen Hauptminoren von $\boldsymbol{A}$ ist (Hauptminor: Determinante einer Untermatrix, die durch Streichen von Zeilen und Spalten gleicher Nummer entsteht).

Mit $\lambda = 1$ und $\boldsymbol{A} = (t-t_0)\left(\boldsymbol{H}(\xi,\eta) + \boldsymbol{R}(t,t_0)\right)$ ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\Big(\boldsymbol{E}_{2n} + (t-t_0)\left(\boldsymbol{H}(\xi,\eta) + \boldsymbol{R}(t,t_0)\right)\Big) &= 1 + (t-t_0)\cdot\Big(\mathrm{Spur}\left(\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\right) + \mathrm{Spur}\left(\boldsymbol{R}(t,t_0)\right)\Big) + \dots \\
&= 1 + (t-t_0)\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{H}_{\eta_i\xi_i}(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{n}\left(-\mathcal{H}_{\xi_i\eta_i}(\xi,\eta)\right) + \sum_{j=1}^{2n} r_j(t,t_0)\Big) + \dots \\
&= 1 + (t-t_0)\sum_{j=1}^{2n} r_j(t,t_0) + \dots\,,
\end{aligned}$$

wobei alle weggelassenen Summanden die Differenz $(t-t_0)$ mindestens in zweiter Potenz enthalten. Also folgt:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Det}\left(\dots\right)\Big|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{\left(1 + (t-t_0)\sum_{j=1}^{2n} r_j(t,t_0) + \dots\right) - \left(1 + (t_0-t_0)\sum_{j=1}^{2n} r_j(t_0,t_0) + \dots\right)}{(t-t_0)}$$

$= \lim_{t\to t_0}\sum_{j=1}^{2n} r_j(t,t_0) + \dots$, wobei alle weggelassenen Summanden die Differenz $(t-t_0)$ mindestens in erster Potenz enthalten. Zusammen mit der Forderung an die Restgliedfunktionen erhalten wir Null, und damit bleibt $\lambda^{2n}(\mathrm{G}^t)$ konstant. ■