

“Null Lagrangians”, invariante Integrale und der Fixpunktsatz von Brouwer

Marcus Wagner

Im gesamten Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte, zusammenhängende Menge mit C^1 -Rand.

11.1 Invariante Integrale

Definition 11–01 ([EVANS 98], p. 439, Definition): *Ein C^2 -Integrand $L(x, z, p) : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt “null Lagrangian”, wenn die ELG’en*

$$L_{z_k}(x, u, Du) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} L_{p_{kj}}(x, u, Du) = 0, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (11.1)$$

für beliebige Funktionen $u \in C^2(\text{cl}(\Omega), \mathbb{R}^m)$ erfüllt sind.

Du ist dann eine (m, n) -Jacobimatrix.

Satz 11–02 ([EVANS 98], p. 439, Theorem 1): *Wenn der C^2 -Integrand L ein “null Lagrangian” ist, so ist $I(w) = \int_{\Omega} L(x, w, Dw) dx$ ein invariantes Integral auf der Menge aller $w \in C^2(\text{cl}(\Omega), \mathbb{R}^m)$ mit $w|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

Beweis: Gegeben seien Funktionen $u, \tilde{u} \in C^2(\text{cl}(\Omega), \mathbb{R}^m)$ mit $u|_{\partial\Omega} = \tilde{u}|_{\partial\Omega} = \varphi$. Wir zeigen, daß $I(w)$ entlang der Strecke $[u, \tilde{u}] \subset C^2(\text{cl}(\Omega), \mathbb{R}^m)$ konstant bleibt, und definieren

$$i(\lambda) = I(\lambda u + (1 - \lambda) \tilde{u}). \quad (11.2)$$

Differentiation unter dem Integralzeichen (vergleiche [ELSTRODT 96], p. 146, Satz 5.7) und Anwendung des Gaußschen Satzes ([EVANS 98], p. 628, Theorem 2) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{di(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \int_{\Omega} L(x, \lambda u + (1 - \lambda) \tilde{u}, \lambda Du + (1 - \lambda) D\tilde{u}) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\sum_k L_{z_k}(x, \lambda u + (1 - \lambda) \tilde{u}, \dots) (u_k - \tilde{u}_k) + \sum_{j,k} L_{p_{kj}}(x, \lambda u + (1 - \lambda) \tilde{u}, \dots) ((u_k)_{x_j} - (\tilde{u}_k)_{x_j}) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_k \left[L_{z_k}(\dots) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} L_{p_{kj}}(\dots) \right] (u_k - \tilde{u}_k) dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k} L_{p_{kj}}(\dots) (u_k - \tilde{u}_k) \mathbf{n}(x) d\sigma(x). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Nach Voraussetzung ist L ein “null Lagrangian”, damit sind die ELG’en für beliebige $u \in C^2(\text{cl}(\Omega), \mathbb{R}^m)$ und insbesondere für die Konvexkombination $\lambda u + (1 - \lambda) \tilde{u}$ erfüllt, und der erste Summand verschwindet. Weil u und $\tilde{u}$ dieselben Randwerte haben, verschwindet der zweite Summand ebenfalls, so daß wir $di(\lambda)/d\lambda = 0$ für alle $0 < \lambda < 1$ erhalten. Diese Funktion ist außerdem in λ stetig; wir können daher den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ([ELSTRODT 96], p. 300) anwenden, und es ergibt sich

$$i(1) = I(u) = i(0) + \int_0^1 \frac{di(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = I(\tilde{u}) + 0. \quad \blacksquare \quad (11.4)$$

11.2 Wie sehen "null Lagrangians" aus?

Für $m = 1$ haben die einzigen "null Lagrangians" die Gestalt $L(x, z, p) = A(x, z) + B(x, z)^T p$ mit gewissen Bedingungen an A und B (vergleiche [GIAQUINTA/HILDEBRANDT 96], p. 55, Proposition 1). Im Fall $m \geq 2$ beweisen wir folgenden Satz:

Satz 11–03 ([EVANS 98], p. 441, Theorem 2): *Sei $m = n$. Dann ist der Integrand $L(x, z, p) = \text{Det}(p)$ ein "null Lagrangian".*

Beweis: Zu zeigen ist:

$$(-) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} L_{p_{kj}}(Du(x)) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \forall x \in \Omega \quad \forall u \in C^2(\text{cl}(\Omega), \mathbb{R}^m). \quad (11.5)$$

Zur (m, n) -Matrix p führen wir die *Matrix der algebraischen Komplemente* $\text{Cof } p$ ein:

$$(\text{Cof } p)_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}, \quad (11.6)$$

worin Δ_{ij} die Unterdeterminante ist, die nach Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte aus p entsteht. Der Entwicklungssatz für $\text{Det}(p)$ (vergleiche [KOWALEWSKI 48], p. 36, Satz 14) besagt: Kombiniert man eine Spalte mit den algebraischen Komplementen derselben Spalte, so erhält man die Determinante; kombiniert man dagegen eine Spalte mit den algebraischen Komplementen einer anderen Spalte, so erhält man Null. Beide Aussagen können unter Verwendung eines Kroneckersymbols wie folgt zusammengefaßt werden:

$$\text{Det}(p) \cdot \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ki} (\text{Cof } p)_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (11.7)$$

Daraus folgt sofort:

$$\frac{\partial}{\partial p_{rs}} \text{Det}(p) = (\text{Cof } p)_{rs}. \quad (11.8)$$

Wir setzen nun Du in (11.7) ein:

$$\text{Det}(Du) \cdot \delta_{ij} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot (\text{Cof } Du)_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (11.9)$$

Differenzieren nach x_j ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{Det}(Du) \delta_{ij} &= \sum_{r,s} \frac{\partial}{\partial p_{rs}} \text{Det}(Du) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_s \partial x_j} \delta_{ij} = \sum_{r,s} (\text{Cof } Du)_{rs} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_s \partial x_j} \delta_{ij} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} (\text{Cof } Du)_{kj} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof } Du)_{kj} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof } Du)_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Nun summieren wir über j :

$$\sum_{r,s} (\text{Cof } Du)_{rs} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_s \partial x_i} = \sum_{k,j} (\text{Cof } Du)_{kj} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof } Du)_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (11.11)$$

Wegen $u \in C^2$ durften die partiellen Ableitungen vertauscht werden, und wir erhalten das (bezüglich $x \in \Omega$ parameterabhängige) lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof } Du)_{kj} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} L_{p_{kj}}(Du) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (11.12)$$

in den Variablen $(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof } Du)_{kj})$, $1 \leq k \leq n$. Dieses LGS hat in allen Punkten $x_0 \in \Omega$ mit

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \dots & \partial u_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial u_n / \partial x_1 & \dots & \partial u_n / \partial x_n \end{pmatrix} (x_0) \neq 0 \quad (11.13)$$

genau die Nulllösung, so daß die ELG'en (11.5) in diesen Punkten erfüllt sind. In Punkten $x_0 \in \Omega$ mit $\text{Det} \dots (x_0) = 0$ ersetzen wir $u(x)$ durch $\tilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon x$. Dann ist $D\tilde{u}(x) = Du(x) + \varepsilon E_n$ mit der (n, n) -Einheitsmatrix E_n und $\text{Det} (Du(x_0) + \varepsilon E_n) \neq 0$ für alle hinreichend kleinen $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, weil die letzte Determinante als Polynom in ε nur endlich viele Nullstellen haben kann. Wir führen mit $\tilde{u}$ dieselbe Rechnung wie oben aus und erhalten das (bezüglich $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ parameterabhängige) LGS

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} (x_0) \cdot \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof } D\tilde{u})_{kj} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (11.14)$$

mit der eindeutig bestimmten Nulllösung

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{Cof} (Du(x_0) + \varepsilon E_n))_{kj} = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (11.15)$$

Die Matrix $\text{Cof } p$ hängt stetig differenzierbar von ihren Einträgen $(\text{Cof } p)_{ij}$ ab, also sind die linken Seiten stetige Funktionen von ε , und wir können in (11.15) den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ ausführen. Die Gültigkeit der ELG'en bleibt daher auch in Punkten $x_0 \in \Omega$ mit $\text{Det} \dots (x_0) = 0$ erhalten. ■

Satz 11–03 kann mindestens bis zu [CARATHÉODORY 29], p. 413, zurückverfolgt werden. Allgemeinere “null Lagrangians” sind Linearkombinationen aus $\text{Det} (p)$ und ihren Unterdeterminanten. Vergleiche hierzu [GIAQUINTA/HILDEBRANDT 96], pp. 55 – 59 und [RUND 74].

11.3 Der Fixpunktsatz von Brouwer

Satz 11–04 (Fixpunktsatz von Brouwer) ([BROUWER 12], p. 115, Satz 4; [EVANS 98], p. 441, Theorem 3): *Sei $B = K(\mathfrak{o}_n, 1) \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$. Jede stetige Funktion $f: B \rightarrow B$ besitzt mindestens einen Fixpunkt $x = f(x)$.*

Beweis: • Schritt 1: *Es kann keine $C^2(\text{cl}(B), \mathbb{R}^n)$ -Funktion $w: B \rightarrow \partial B$ mit $w(x) = x$ für alle $x \in \partial B$ geben.* Wenn doch eine derartige Funktion w existiert, so folgt für alle $x \in B$: $|w(x)| = 1$, damit $|w(x)|^2 = w(x)^T w(x) = 1$, $Dw(x) w(x) = \mathfrak{o}_n$ und $Dw(x) w(x) = 0 \cdot w(x)$, also ist 0 Eigenwert der Matrix $Dw(x)$ mit zugehörigem Eigenvektor $w(x) \neq \mathfrak{o}_n$ für alle $x \in B$. Daher muß $\text{Det} (Dw(x))$ identisch Null sein. Andererseits stimmt $w(x)$ für alle $x \in \partial \Omega$ mit der identischen Abbildung $E(x)$ überein. Mit den Sätzen 11–02 und 11–03 erhalten wir:

$$0 = \int_B \text{Det} (Dw(x)) dx = \int_B \text{Det} (DE(x)) dx = \int_B 1 dx = |B| > 0, \quad (11.16)$$

und wir erhalten einen Widerspruch. Man beachte, daß für jede Kugel $K(\mathfrak{o}_n, R)$ mit $R > 0$ dieselben Argumente gelten.

• Schritt 2: *Es kann keine $C^0(\text{cl}(B), \mathbb{R}^n)$ -Funktion $w: B \rightarrow \partial B$ mit $w(x) = x$ für alle $x \in \partial B$ geben.* Wenn doch eine derartige Funktion w existiert, so setzen wir sie mit $\tilde{w}(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}^n \setminus B$ fort. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $|\tilde{w}(x)| \geq 1$ und $\tilde{w}(x) \neq \mathfrak{o}_n$. Aus der Theorie der Mollifier entnehmen wir folgendes Lemma:

Lemma 11–05: Zur stetigen Funktion $\tilde{w}$ existiert eine Familie von Funktionen $w_\varepsilon(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften: 1) $w_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 2) $w_\varepsilon(x) = \tilde{w}(x) = x$ für alle $|x| \geq 2$, 3) $w_\varepsilon(x) \rightrightarrows \tilde{w}(x)$ für alle $x \in K(\mathfrak{o}_n, 2)$.

Für hinreichend kleines $0 < \varepsilon < 1$ ist daher $|w_\varepsilon(x)| > 1/2$ für alle $x \in K(\mathfrak{o}_n, 2)$, und die Funktion $z: K(\mathfrak{o}_n, 2) \rightarrow \partial K(\mathfrak{o}_n, 2)$ gemäß

$$z(x) = 2 \frac{w_\varepsilon(x)}{|w_\varepsilon(x)|} \quad (11.17)$$

ist wohldefiniert und von C^∞ . Für $|x| = 2$ folgt $z(x) = 2x/|x| = x$. Nach Schritt 1 kann aber z nicht existieren, also auch $\tilde{w}$ und w nicht.

Schritt 3: Sei $f: B \rightarrow B$ stetig, aber ohne Fixpunkt. Dann kann man eine Funktion $w: B \rightarrow \partial B$ definieren, indem man jedem Punkt $x \in B$ den eindeutig bestimmten Punkt $w(x) \in \partial B$ auf dem Strahl $\overrightarrow{f(x)x}$ zuordnet. Wegen $f(x) \neq x$ für alle x ist $w(x)$ wohldefiniert, und aus der Stetigkeit von $f(x)$ und $x = E(x)$ und der C^1 -Randglätte der Einheitskugel ergibt sich, daß die Funktion w auch stetig ist. Dann gilt jedoch $w(x) = x$ für alle $x \in \partial B$ im Widerspruch zu Schritt 2. Also kann w nicht erklärt werden, was nur möglich ist, wenn f doch einen Fixpunkt besitzt. ■

Beweis zu Lemma 11–05: 1) und 3) ergeben sich aus [EVANS 98], p. 630, Theorem 6, (i) und (iii), mit $U = U_\varepsilon = \mathbb{R}^n$. Um 2) zu beweisen, greifen wir unmittelbar auf die Definitionen aus [EVANS 98], p. 629, zurück. Es gilt:

$$\eta(x) = \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}(x) \cdot C \cdot \exp \frac{1}{|x|^2 - 1}, \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad (11.18)$$

$$(w_i)_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * \tilde{w}_i(x) = \int_{K(\mathfrak{o}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) \tilde{w}_i(x - y) dy. \quad (11.19)$$

Für $|x| \geq 2$ und $\varepsilon < 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} (w_i)_\varepsilon(x) &= \int_{K(\mathfrak{o}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) (x_i - y_i) dy \\ &= x_i \cdot \int_{K(\mathfrak{o}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) dy - \int_{K(\mathfrak{o}, \varepsilon) \cap \{y_i \geq 0\}} \eta_\varepsilon(y) y_i dy - \int_{K(\mathfrak{o}, \varepsilon) \cap \{y_i < 0\}} \eta_\varepsilon(y) y_i dy. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Wegen (11.18) ergibt der erste der drei Summanden x_i , während sich der zweite und dritte wegen Radialsymmetrie von η_ε und Antisymmetrie von y_i aufheben. ■

Literaturverzeichnis

- [BROUWER 12] Brouwer, L. E. J.: *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*. Math. Annalen **71** (1912), 97 – 115
- [CARATHÉODORY 29] Carathéodory, C.: *Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen*. In: Carathéodory, C.: *Gesammelte mathematische Schriften. Erster Band*. C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung; München 1954, 401 – 426 (Nachdruck des Artikels aus Acta Math. Szeged **4** (1929), 193 – 216)
- [ELSTRODT 96] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer; Berlin etc. 1996
- [EVANS 98] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society; Providence 1998
- [GIAQUINTA/HILDEBRANDT 96] Giaquinta, M.; Hildebrandt, S.: *Calculus of Variations I*. Springer; Berlin etc. 1996
- [KOWALEWSKI 48] Kowalewski, G.: *Einführung in die Determinantentheorie*. Chelsea; New York 1948 (Nachdruck der 3. Aufl.)
- [RUND 74] Rund, H.: *Integral formulae associated with the Euler-Lagrange operator of multiple integral problems in the calculus of variations*. Aeq. Math. **11** (1974), 212 – 229