

Mehrdimensionale Steuerungsprobleme mit quasikonvexen Integranden

Habilitationsschrift

Der
Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik
an der
Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

am 10. Januar 2006 vorgelegt von
Dr. rer. nat. MARCUS WAGNER

Angaben zum Habilitationsverfahren.

- * Eröffnung des Habilitationsverfahrens: 11. Januar 2006
- * Gutachter: Prof. Bernard Dacorogna (Lausanne), Prof. Günter Leugering (Erlangen-Nürnberg),
und Prof. Sabine Pickenhain (Cottbus)
- * Öffentliche Verteidigung der Arbeit: 31. Mai 2006
- * Zuerkennung der Lehrbefähigung im Fach Mathematik: 14. Juni 2006

“Indem der Mensch die Einfachheit als den Anfang und das Ende von allem entdeckt, kann er das Wagnis eingehen, furchtlos neue Werte zu schaffen. Das Gebet ist der Gipfel des Schaffens; es eröffnet uns den Weg zur Verwirklichung anderer schöpferischer Impulse.” (TATJANA GORITSCHewa)⁰¹⁾

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung von mehrdimensionalen Steuerungsproblemen gewidmet, in denen partielle Differentialgleichungen erster Ordnung auftreten. Wir stellen uns darin das Ziel, durch Anwendung moderner Methoden aus Funktionalanalysis und Variationsrechnung einen Fortschritt sowohl in der Existenztheorie als auch in der Kenntnis notwendiger Optimalitätsbedingungen für derartige Steuerungsprobleme zu erreichen. Außerdem wollen wir zeigen, wie Aufgabenstellungen aus der mathematischen Bildverarbeitung als mehrdimensionale Steuerungsprobleme der genannten Klasse behandelt werden können.

1.1. Mehrdimensionale Steuerungsprobleme mit partiellen DGL.en erster Ordnung.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir Steuerungsprobleme, die aus der mehrdimensionalen Grundaufgabe der Variationsrechnung

$$(V)_0 \quad F(x) = \int_{\Omega} f(t, x(t), Jx(t)) dt \longrightarrow \inf!; \quad x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

entstehen, indem man mindestens Beschränkungen für die partiellen Ableitungen von x hinzunimmt. Beispielsweise ergibt sich mit

$$Jx(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m}(t) \end{pmatrix} \in K \subset \mathbb{R}^{nm} \quad (\forall) t \in \Omega \quad (1.2)$$

aus $(V)_0$ das Steuerungsproblem

$$(P)_0 \quad F(x, u) = \int_{\Omega} f(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{nm}); \quad (1.3)$$

$$Jx(t) = u(t) \quad (\forall) t \in \Omega; \quad (1.4)$$

$$u \in U = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{nm}) \mid u(t) \in K \quad (\forall) t \in \Omega \}. \quad (1.5)$$

Steuerungsaufgaben, in denen als Zustandsgleichungen partielle DGL.en erster Ordnung $(G(t, x(t), Jx(t), u(t)) = 0)$ zusammen mit Randbedingungen, Phasen- und Steuerbeschränkungen auftreten, werden nach CESARI als *Dieudonné-Rashevsky-Probleme* bezeichnet.⁰²⁾

Obwohl derartige Steuerungsprobleme weniger intensiv untersucht worden sind als vergleichbare Aufgaben mit partiellen DGL.en zweiter Ordnung für x ,⁰³⁾ stehen doch seit den 90er Jahren notwendige Optimalitätsbedingungen und Dualitätssätze für konvexe Aufgaben mit linearen Zustandsgleichungen $(G(\dots) =$

⁰¹⁾ [GORITSCHewa 88], p. 16.

⁰²⁾ [CESARI 69], p. 339: “problem ... with differential equations ... written in the Dieudonné-Rashevsky form”.

⁰³⁾ Wir verweisen etwa auf [LIONS 71] und [TRÖLTZSCH 05A].

$Jx(t) - u(t) = 0$ bzw. $G(\dots) = Jx(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t) = 0$) zur Verfügung.⁰⁴⁾ Insbesondere lassen sich Torsionsprobleme für prismatische Stäbe mit elastischem bzw. elastisch-plastischem Materialverhalten, die als klassischer Anwendungsbereich für Dieudonné-Rashevsky-Probleme gelten können, in diesen Rahmen einordnen.⁰⁵⁾ Darin treten eine Spannungsfunktion T als Zustandsvariable und die (zu den partiellen Ableitungen von T proportionalen) Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} in der Querschnittsfläche des Stabes als Steuerungen auf,⁰⁶⁾ während sich die Steuerbeschränkung für Materialien wie z. B. Stahl aus der Forderung ergibt, daß der Betrag der resultierenden Schubspannung die sog. Fließgrenze nicht überschreiten darf.⁰⁷⁾ Geometrische Optimierungsaufgaben für konvexe Körper, die mit Hilfe ihrer Stützfunktion in Kugelkoordinaten beschrieben werden, führten ebenfalls auf konvexe Dieudonné-Rashevsky-Probleme mit linearen Zustandsgleichungen.⁰⁸⁾

Unter völlig anderen Gesichtspunkten sind DACOROGNA und MARCELLINI in ihren Ende der 90er Jahre erschienenen Arbeiten über unterbestimmte Randwertaufgaben für nichtlineare pDGLen erster Ordnung⁰⁹⁾ zu Dieudonné-Rashevsky-Problemen gelangt. Erfüllt beispielsweise eine Funktion $f(t, \xi, v): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ neben $f(t, \mathbf{o}, \mathbf{o}) \leq 0$ ($\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$) gewisse Koerzitivitäts- und Konvexitätsbedingungen, so ist die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$f(t, x(t), \nabla x(t)) = 0 \quad (\forall t \in \Omega, \quad x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})) \quad (1.6)$$

äquivalent zur Lösung des Steuerungsproblems

$$(P)_1 \quad F(x, u) = \int_{\Omega} (f(t, x(t), u(t)))^2 dt \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}) \times L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m); \quad (1.7)$$

$$\nabla x(t) = u(t) \quad (\forall t \in \Omega); \quad (1.8)$$

$$u \in U = \{ u \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in K \quad (\forall t \in \Omega) \}, \quad (1.9)$$

worin $K \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexer Körper ist, der ausgehend von f konstruiert wird. Überdies ist die Menge der globalen Minimalstellen überabzählbar und liegt in der Menge $\{ x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}) \mid f(t, x(t), \nabla x(t)) \leq 0 \quad (\forall t \in \Omega) \}$ in L^{∞} -Norm dicht.¹⁰⁾ In Abschnitt 8.3. wird gezeigt, daß die in (1.6) vorausgesetzte analytische Situation in einer klassischen Aufgabe der Bildverarbeitung — dem Shape-from-Shading-Problem — tatsächlich eintritt, so daß diese Aufgabe eine Neuformulierung als Dieudonné-Rashevsky-Problem gestattet.

⁰⁴⁾ Die entsprechende Theorie wurde im wesentlichen durch KLÖTZLER, PICKENHAIN und den Verfasser ausgearbeitet. Ein Überblick über die Arbeiten zu notwendigen Optimalitätsbedingungen befindet sich am Anfang von Kapitel 7. Von den Arbeiten zur Dualitätstheorie nennen wir [KLÖTZLER 95], [KLÖTZLER 98], [PICKENHAIN 91], pp. 26 – 94, [PICKENHAIN 92B], [PICKENHAIN 02], [PICKENHAIN/TAMMER 91], [PICKENHAIN/WAGNER 01] und [WAGNER 00] sowie die grundlegende Arbeit [KLÖTZLER 79].

⁰⁵⁾ Beschreibung der St.-Venantschen Torsion bei elastischem Materialverhalten: als Variationsproblem bereits bei [FUNK 62], pp. 531 ff., als Steuerungsproblem bei [LUR'E 75], pp. 240 ff. und [WAGNER 96], pp. 76 ff. Unter denselben Voraussetzungen kann die Wölbkrafttorsion mit Hilfe des Energiefunktional [SAUER 80], p. 20, (4.-60), bestimmt werden. Torsionsprobleme bei elastisch-plastischem Materialverhalten wurden in den Arbeiten von TING untersucht (siehe etwa [TING 69A], p. 531 f., [TING 69B]).

⁰⁶⁾ Wir verwenden die Bezeichnungen aus [SAUER 80], pp. 8 – 20.

⁰⁷⁾ Vergleiche [CHMELKA/MELAN 76], pp. 38 – 45.

⁰⁸⁾ [ANDREJEWA/KLÖTZLER 84A], [ANDREJEWA/KLÖTZLER 84B], p. 149 f.

⁰⁹⁾ [DACOROGNA/MARCELLINI 97], [DACOROGNA/MARCELLINI 98], [DACOROGNA/MARCELLINI 99].

¹⁰⁾ Dies ergibt sich aus [DACOROGNA/MARCELLINI 99], p. 35, Theorem 2.3., und der Analyse des zugehörigen Beweises ebenda, pp. 43 – 47.

Auch wenn die von DACOROGNA/MARCELLINI formulierten Voraussetzungen nicht oder nicht vollständig erfüllt sind, erscheint es plausibel, inkorrekt gestellte Randwertaufgaben der Gestalt (1.6) bzw.

$$f(t, x(t), Jx(t)) = 0 \quad (\forall) t \in \Omega, \quad x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad n > 1 \quad (1.10)$$

als mehrdimensionale Steuerungsprobleme zu behandeln. Im Zielfunktional könnte neben dem Defektminimierungsterm noch ein Regularisierungsterm berücksichtigt werden, während die Steuerbeschränkung als Parameter fungiert. Als Beispiel für ein derartiges Vorgehen formulieren wir eine weitere Aufgabe aus der Bildverarbeitung, die Bestimmung des optischen Flusses, als Dieudonné-Rashevsky-Problem (siehe Abschnitt 8.2.).

Angeregt und motiviert durch diese Entwicklungen (insbesondere durch die Arbeiten [KINDERLEHRER/PEDREGAL 91] und [DACOROGNA/MARCELLINI 97]), wollen wir Dieudonné-Rashevsky-Probleme auch im Fall $n \geq 2$, $m \geq 2$ untersuchen, der quasikonvexe Relaxation erfordert. Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, in diesem Fall Existenz- bzw. Relaxationssätze sowie notwendige Optimalitätsbedingungen zu beweisen und die hierfür notwendigen Methoden bereitzustellen. Analog zum Vorgehen in der mehrdimensionalen Variationsrechnung konzentrieren wir uns dabei auf die Untersuchung eines *Modellproblems*, in dem der Integrand im Zielfunktional allein von den Steuervariablen abhängt. Diese Aufgabe lautet wie folgt:

$$(P) \quad F(x) = \int_{\Omega} f(Jx(t)) dt \longrightarrow \inf!; \quad x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n); \quad Jx(t) \in K \quad (\forall) t \in \Omega \quad (1.11)$$

mit $n \geq 2$, $m \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ als Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne. $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ sei ein konvexer Körper mit $0 \in \text{int}(K)$, und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiger, aber nicht notwendig konvexer Integrand. Der zulässige Bereich von (P) ist konvex, das Zielfunktional im allgemeinen nicht, so daß an (P) alle wesentlichen Züge der (gegenüber dem Fall $n = 1$) veränderten analytischen Situation studiert werden können. Insbesondere muß (P) nicht mehr konvex, sondern quasikonvex relaxiert werden, und auch bei der Formulierung der notwendigen Optimalitätsbedingungen darf nur noch die Quasikonvexität des Integranden vorausgesetzt werden.

Im folgenden Abschnitt wollen wir den Gang der Untersuchung näher erläutern und die wichtigsten Ergebnisse kurz umreißen.

1.2. Gliederung der Arbeit; die wichtigsten Ergebnisse.

An den Beginn unserer Untersuchungen stellen wir die Frage, wie der Begriff "Quasikonvexität" für eine stetige Funktion verstanden werden soll, die nicht auf dem Gesamtraum $\mathbb{R}^{nm}$, sondern nur auf einem konvexen Körper $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ definiert ist. In *Kapitel 2* betrachten wir daher quasikonvexe Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (Definition 2.11.) und konvexem effektivem Definitionsbereich $\text{dom}(f) = K$. In der Morreyschen Integralungleichung

$$f(v) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v + Jx(t)) dt \quad \forall x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad (1.12)$$

müssen dann nur diejenigen Lipschitzfunktionen x zur Variation zugelassen werden, für welche $v + Jx(t)$ für fast alle t zu K gehört (Satz 2.13.). Die passende Verallgemeinerung des Begriffs der quasikonvexen Hüllfunktion ergibt sich aus der Beobachtung, daß für eine Funktion f mit endlichen Werten alle zur Hüllenbildung zugelassenen quasikonvexen Funktionen $g \leq f$ von selbst stetig sein müssen. Wir bilden daher eine Hüllfunktion $f^{(qc)}$ als punktweises Supremum aller *unterhalbstetigen*, quasikonvexen Funktionen $g \leq f$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 2.16., 2)). Gehört f zur Funktionenklasse $\mathcal{F}_K$,¹¹⁾ so ist $f^{(qc)}$ die größte

¹¹⁾ Siehe Definition 1.3. unten.

unterhalbstetige, quasikonvexe Funktion unterhalb f (Satz 2.20.). Die Notwendigkeit, den in (P) nur auf K definierten Integranden vor der Hüllenbildung tatsächlich mit $(+\infty)$ auf $\mathbb{R}^{nm} \setminus K$ fortzusetzen, wird durch zwei Beispiele belegt.

In *Kapitel 3* stellen wir uns das Ziel, die Beziehungen zwischen der neu eingeführten Hüllfunktion $f^{(qc)}$ und der von DACOROGNA/MARCELLINI vorgeschlagenen Hüllfunktion f^* ¹²⁾ mit

$$f^*(v) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(v + Jx(t)) dt \mid x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n), v + Jx(t) \in K \ (\forall) t \in \Omega \right\} \quad (1.13)$$

für $f \in \mathcal{F}_K$ aufzuklären. Dabei gelangen wir zu folgenden Ergebnissen: f^* und $f^{(qc)}$ unterscheiden sich nicht im Inneren, im allgemeinen aber auf dem Rand von K . f^* ist sowohl auf $\text{int}(K)$ als auch auf dem relativ Inneren der Facetten von K stetig (Satz 3.6., 1)), aber im allgemeinen keine unterhalbstetige Funktion, während $f^{(qc)}$ als unterhalbstetige Hüllfunktion von f^* entsteht. $f^{(qc)}(v)$ kann für $v \in \text{int}(K)$ durch die Formel (1.13) und für $v_0 \in \partial K$ durch den radialen Limes

$$\lim_{v \rightarrow v_0, v \in \mathbb{R} \cap \text{int}(K)} f^*(v) \quad (1.14)$$

entlang des Strahls $\mathbb{R} = \overrightarrow{o v_0}$ dargestellt werden (erster Darstellungssatz für $f^{(qc)}$, Satz 3.22.). Alternativ kann $f^{(qc)}$ als Hülle stetiger, eingeschränkt quasikonvexer Funktionen $g \leq f$ gewonnen werden (zweiter Darstellungssatz für $f^{(qc)}$, Satz 3.26.). Beim Beweis dieser Eigenschaften spielen insbesondere eine gegenüber [DACOROGNA/MARCELLINI 97] verbesserte Stetigkeitsrelation für f^* (Satz 3.5.) und die Existenz und Gleichmäßigkeit des Limes (1.14) (Satz 3.12.) eine Rolle. Das Kapitel enthält außerdem Beispielrechnungen: wir bestimmen für den vierdimensionalen Würfel $K = [-1, 1]^4$ und $f \in \mathcal{F}_K$ die Werte von f^* auf den Facetten von K und geben anschließend eine Funktion mit $f^{(qc)} \neq f^*$ an. Aus demselben Beispiel ergibt sich außerdem, daß sich sowohl $f^{(qc)}$ als auch f^* unstetig ändern, wenn K in Hausdorff-Metrik approximiert wird.

In *Kapitel 4* wollen wir für $f^{(qc)}$ — analog zur konvexen Hüllfunktion — eine Darstellung

$$f^{(qc)}(w) = \text{Min} \left\{ \int_K f(v) d\nu(v) \mid \nu \in S^{(qc)}(w) \right\} \quad (1.15)$$

mit konvexen, schwach*-kompakten Mengen $S^{(qc)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen (“supporting measures”) auffinden. Dabei orientieren wir uns an der in [KINDERLEHRER/PEDREGAL 91] eingeführten Technik, “supporting measures” durch Mittelwertbildung aus maßwertigen Abbildungen zu gewinnen. Wir betrachten daher den metrischen Raum $rca^{pr}(K)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf K , die Menge $\mathcal{Y}(K)$ der verallgemeinerten Steuerungen (“Youngsche Maße”) und die Menge $\mathcal{J}(K)$ der verallgemeinerten Steuerungen, die mit Hilfe von Jacobimatrizen erzeugt werden können (“Youngsche Gradientenmaße”). Außerdem stellen wir eine passende Variante des Mittelwertsatzes von KINDERLEHRER/PEDREGAL bereit. Die gesuchte Abbildung $S^{(qc)}$ wird nun in zwei Schritten definiert: zuerst als stetige mengenwertige Abbildung S^* auf $\text{int}(K)$ (Definition 4.20.), dann als deren oberhalbstetige Fortsetzung $S^\#$ auf ∂K (Definition 4.26.). Unser Vorgehen ist dabei parallel zu Kapitel 3: die ε - δ -Relationen für f^* und $f^\#$ können in den Kontext mengenwertiger Abbildungen übertragen werden, wobei an die Stelle der Unterhalbstetigkeit der Funktion $f^\# = f^{(qc)}$ die Oberhalbstetigkeit der mengenwertigen Abbildung $S^\#$ tritt. Am Ende des Kapitels gelingt die gesuchte Darstellung (1.15) für $f^{(qc)}$ mit $S^{(qc)}(w) = S^\#(w)$ (dritter Darstellungssatz für $f^{(qc)}$, Satz 4.32.).

¹²⁾ Siehe [DACOROGNA/MARCELLINI 97], p. 27, Theorem 7.2., und Definition 3.1. unten.

Die Untersuchung von $f^{(qc)}$ wird in *Kapitel 5* durch den Beweis der Jensenschen Integralungleichung vervollständigt (Satz 5.2.). Durch diese Ungleichung wird die Verbindung zwischen den Darstellungen aus Kapitel 3 und 4 hergestellt. Anschließend gelingt es nach dem Vorbild von [BALL/KIRCHHEIM/KRISTENSEN 00] nachzuweisen, daß sich die stetige Differenzierbarkeit von f in Punkten $v \in \text{int}(K)$ auf $f^{(qc)}$ überträgt (Satz 5.5.).

Wir sind nunmehr in der Lage, für das Modellproblem (P) Existenz- und Relaxationssätze zu formulieren. Bei der Relaxation eines Steuerungsproblems hat man einerseits die Möglichkeit, bei Erhalt des Minimalwertes und des zulässigen Bereiches den Integranden im Zielfunktional durch eine passende Hüllfunktion zu ersetzen. Die andere Möglichkeit besteht in der Einführung maßwertiger Abbildungen als verallgemeinerte Steuerungen. In *Kapitel 6* werden nacheinander beide Wege eingeschlagen. Indem man in (P) den Integranden $f \in \mathcal{F}_K$ im Zielfunktional durch $f^{(qc)}$ ersetzt, ergibt sich ein klassischer Relaxationssatz, der die bekannten Ergebnisse von DACOROGNA und EKELAND/TÉMMAM¹³⁾ verallgemeinert (Satz 6.3.). Im zweiten Fall formulieren wir die relaxierte Aufgabe mit einer passenden Teilmenge verallgemeinerter Steuerungen und beweisen erneut die Übereinstimmung der Minimalwerte (Satz 6.7.). Der Beweis des ersten Relaxationssatzes folgt dem Vorbild von [DACOROGNA 89]; beim Beweis des zweiten Satzes stützen wir uns auf den Satz von SCHÄL über den optimalen Selektor (als Weiterentwicklung des bekannten Filippov-Lemmas). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit begnügen wir uns mit der Untersuchung des Integranden $f(v)$ aus (P); es ist jedoch zu erwarten, daß sich die vorgestellten Beweismethoden auch auf Integranden der Gestalt $f(t, \xi, v)$ übertragen lassen.

Kapitel 7 ist dem Beweis notwendiger Optimalitätsbedingungen für Dieudonné-Rashevsky-Probleme gewidmet. In den bisher bekannten notwendigen Bedingungen für linear-konvexe Aufgaben $(P)_0$ hängen die Multiplikatoren von einem zusätzlichen Parameter $\varepsilon > 0$ ab, so daß vor der Auswertung der Bedingungen jeweils ein zusätzlicher Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in den adjungierten Variablen durchgeführt werden mußte. Beispielsweise lautete die (vom Parameter ε abhängige) Maximumbedingung in integrierter Form mit Multiplikatoren $\lambda^\varepsilon > 0$ und $y^\varepsilon \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, wie folgt:

$$\varepsilon + \lambda^\varepsilon \int_{\Omega} \left(f(t, x^*(t), u(t)) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \right) dt - \sum_{i,j} \int_{\Omega} (u_{ij}(t) - u_{ij}^*(t)) y_{ij}^\varepsilon(t) dt \geq 0 \quad \forall u \in U. \quad (1.16)$$

Wir beweisen zunächst, daß man unter gleichen Voraussetzungen auf den Parameter ε in den Bedingungen verzichten kann (Pontrjaginsches Maximumprinzip für $(P)_0$, Satz 7.2.). Danach behandeln wir das quasikonvexe Modellproblem $(P)^{(qc)}$, das sich durch Relaxation aus (P) ergibt. Die Herausforderung beim Beweis des Maximumprinzips für diese Aufgabe besteht in der Tatsache, daß für die Graphen quasikonvexer Funktionen keine Trennungssätze zur Verfügung stehen. Dennoch ist es unter zusätzlichen Voraussetzungen möglich, notwendige Bedingungen in Gestalt des Maximumprinzips zu beweisen. Wenn sich $f|_K$ als Einschränkung einer C^1 -Funktion $\tilde{f}$ auf K ergibt und ∂K nur aus Extrempunkten besteht, so ist $f^{(qc)}$ auf $\text{int}(K)$ stetig differenzierbar und auf K global Lipschitz-stetig, so daß die erste Variation des Zielfunktional mit Hilfe der Clarkeschen Richtungsableitung für $f^{(qc)}$ beschrieben werden kann (Pontrjaginsches Maximumprinzip für das quasikonvexe Modellproblem, Satz 7.9.). Zur Erklärung der Richtungsableitung in Punkten $v_0 \in \partial K$ werden noch Werte von $\tilde{f}$ außerhalb von K benötigt, so daß wir die Clarkesche Richtungsableitung in einem weiteren Schritt durch eine Größe ersetzen, bei deren Bildung die Werte von $\tilde{f}$ außerhalb von K keine Rolle mehr spielen (Satz 7.13.). In allen Fällen erhalten wir die Maximumbedingung sowohl in integrierter als auch in fast überall punktweise gültiger Form. Am Schluß des Kapitels wird noch die Weylsche Zerlegung

¹³⁾ [DACOROGNA 89], pp. 228 ff., Theorem 2.1., und pp. 235 ff., Corollaries 2.2. und 2.3., bzw. [EKELAND/TÉMMAM 99], p. 327, Corollary 2.17., zusammen mit p. 334, Proposition 3.4., und p. 335 f., Proposition 3.6.

der adjungierten Variablen $y \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ in “Gradienten”- und “Rotorkomponenten” durchgeführt (Satz 7.21.).

In *Kapitel 8* schließt sich die Diskussion drei möglicher Anwendungsbereiche für Dieudonné-Rashevsky-Probleme an. Alle drei Aufgaben kommen aus der mathematischen Bildverarbeitung und wurden in der Literatur bisher als Variationsprobleme behandelt. Es handelt sich um die Aufgabe der Wiederherstellung eines Bildes aus gestörten Aufnahmedaten (“image restoration”/“image smoothing”), die Konvertierung von zeitabhängig gegebenen Bilddaten in den sog. optischen Fluß (“optical flow”) und die Rekonstruktion der Gestalt einer Oberfläche aus Luftbildern (“shape from shading”). In allen drei Fällen ist die Hinzufügung von Steuerbeschränkungen zu den Variationsproblemen plausibel, beim Shape from Shading sogar zwingend (Satz 8.4.). Je nach Formulierung gelangen wir zu Dieudonné-Rashevsky-Problemen, die konvex bzw. quasikonvex relaxiert werden müssen.

Am Ende der Arbeit stehen drei Anhänge (*Kapitel 9 – 11*). Darin werden verschiedene Fakten aus der Maßtheorie, der Theorie konvexer Körper und Funktionen sowie der Theorie mengenwertiger Abbildungen zusammengefaßt, die der Klarheit der Darstellung zuliebe aus dem laufenden Text ausgeklammert worden sind. Außerdem geben wir eine vollständige Übersicht über die in der Arbeit auftretenden Optimierungsprobleme und die verwendeten Symbole und Notationen. Einige besonders wichtige Notationen werden jedoch schon im folgenden Abschnitt 1.3. vorgestellt.