

**Erweiterungen
des mehrdimensionalen Pontrjaginschen Maximumprinzips auf
meßbare und beschränkte sowie distributionelle Steuerungen**

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rerum naturalium

der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Leipzig

Eingereicht von Dipl.-Math. Marcus Wagner, geboren
am 19. 11. 1965 in Leipzig,
angefertigt am Fachbereich Mathematik der Fakultät für
Mathematik und Informatik der Universität Leipzig,
betreut von Prof. Dr. Rolf Klötzler, Universität Leipzig.

* Die vorliegende Dissertation haben begutachtet und zur Annahme empfohlen:

Prof. R. Klötzler, Leipzig;

Prof. J. Gwinner, München;

Prof. G. S. Rubinstein, Novosibirsk;

Prof. B. Kirstein, Leipzig.

* Beschluß über die Verleihung des Doktorgrades vom 26. 02. 1996

0. Einleitung

0.1. Gegenstand und Plan der Arbeit

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Theorie optimaler Steuerungen, indem Erweiterungen des Pontrjaginschen Maximumprinzips für mehrdimensionale Aufgaben formuliert und bewiesen werden. Ich möchte daher mit einer Gegenüberstellung einiger bisher erzielter Resultate für ein- und mehrdimensionale Aufgaben beginnen und dann erklären, welche Verallgemeinerungen dieser Resultate angestrebt werden.

Die ersten Steuerungsprobleme entstanden bekanntlich aus Aufgaben der "eindimensionalen" Variationsrechnung für gesuchte Funktionen $x(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, indem den Ableitungen $u(t) = \dot{x}(t)$ zusätzliche Beschränkungen $u(t) \in V(t)$, $V(t) \in \text{Cl}(\mathbb{R}^1)$ auferlegt wurden. Der Hauptsatz der sich seit den 50er Jahren rasch entwickelnden Theorie, das Pontrjaginsche Maximumprinzip, stellt eine Zusammenfassung und Verallgemeinerung der bekannten notwendigen Optimalitätsbedingungen für "eindimensionale" Variationsprobleme dar. Wir veranschaulichen den Satz an der Aufgabe

$$(*) \quad J(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \inf !, \quad [x, u] \in PC^1[0, T] \times PC^{0,s}[0, T];$$

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, T] \text{ mit Ausnahme der Sprungstellen von } u(t),$$

$$u(t) \in V(t) \in \text{Cl}(\mathbb{R}^s).^1)$$

f und g seien in allen Variablen stetig und in der zweiten Variablen jeweils stetig differenzierbar. Die $u \in V$ heißen *zulässige Steuerungen*. Die Mengen $V(t)$ seien so beschaffen, daß für alle $t \in [0, T]$ und alle $v \in V(t)$ eine in t stetige zulässige Steuerung u mit $u(t) = v$ existiert.

Satz 0.1–1: (Pontrjaginsches Maximumprinzip) Zu $(*)$ sei eine *starke lokale Minimalstelle* $[\hat{x}, \hat{u}]$ vorgegeben. Das bedeutet: Für alle zulässigen Elemente $[x, u]$ mit $\|x - \hat{x}\|_{C^0[0, T]} \leq \varepsilon$ gilt $J(\hat{x}, \hat{u}) \leq J(x, u)$. Dann besagt das Pontrjaginsche Maximumprinzip, daß zu $[\hat{x}, \hat{u}]$ Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0$ und $y \in PC^1[0, T]$ existieren, die nicht gleichzeitig verschwinden und zusammen mit $[\hat{x}, \hat{u}]$ drei Bedingungen $(\mathcal{MP})$, $(\mathcal{K})$ und $(\mathcal{T})$ erfüllen. Diese Bedingungen werden mit Hilfe der *Pontrjagin-Funktion*

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 f(t, \xi, v) + \eta \cdot g(t, \xi, v)$$

formuliert. Zuerst besteht folgende Ungleichung $(\mathcal{MP})$, die *Maximumbedingung*:

$$(\mathcal{MP}): \quad H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), y(t), \lambda_0) - H(t, \hat{x}(t), u(t), y(t), \lambda_0) \geq 0 \quad \forall u(t) \in V(t).$$

Diese Ungleichung gilt für alle $t \in [0, T]$, in denen $\hat{u}$ stetig ist, also fast überall punktweise. Die zweite Bedingung ist die *kanonische Gleichung* $(\mathcal{K})$, die wie folgt lautet:

$$(\mathcal{K}): \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), y(t), \lambda_0) = \lambda_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - y(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} g(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t));$$

dies gilt wiederum für alle $t \in [0, T]$, in denen $\hat{u}$ stetig ist. Schließlich gelten die *Transversalitätsbedingungen* $(\mathcal{T})$; in unserem Fall $y(0) = y(T) = 0$. Zur Bestimmung einer (starken lokalen) Minimalstelle stehen also die drei notwendigen Bedingungen $(\mathcal{MP})$, $(\mathcal{K})$ und $(\mathcal{T})$ zur Verfügung. ■²⁾

¹⁾ Für $g(t, x(t), u(t)) = u(t)$ und $V(t) = \mathbb{R}^s$ steht ein Variationsproblem ohne Randbedingungen da.

²⁾ Vergleiche GALEEV/TICHOMIROV [27], S. 91 ff.

Ich habe an dieser Stelle darauf verzichtet, die allgemeinsten möglichen analytischen Voraussetzungen zu formulieren. Hervorzuheben ist, daß f in der dritten Variablen weder konvex noch differenzierbar sein muß. Die Bezeichnung “Maximumprinzip” bringt treffend zum Ausdruck, daß es sich bei diesem Satz nicht um ein isoliertes, ausschließlich mit einer bestimmten Aufgabenstellung und ihrer speziellen analytischen Situation verknüpft Resultat handelt; vielmehr wird eine Vorgehensweise beschrieben, nach der man notwendige Optimalitätsbedingungen für Steuerungsprobleme unter den verschiedensten Voraussetzungen erhalten kann. Für “eindimensionale” Aufgaben ist dieses Programm weitgehend verwirklicht worden. So wird das Maximumprinzip bei IOFFE/TICHOMIROV [28] für Funktionen $x(t)$ formuliert, die aus Sobolevräumen kommen; KLÖTZLER [33] und ORLOV [41] übertrugen den Satz auf distributionelle Steuerungen $u \in \mathcal{D}'^{\infty,s}[0, T]$. Es ist ebenso möglich, Randbedingungen für x oder isoperimetrische Nebenbedingungen in die Aufgabenstellung einzubeziehen.

Gehen wir nun zu “mehrdimensionalen” Aufgaben über (Aufgaben für gesuchte Funktionen $x(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, die dann zusammen mit den Steuervariablen $u(t)$ partiellen Differentialgleichungen gehorchen müssen). Dort steht gegenwärtig eine weit ausgearbeitete Theorie für Aufgaben mit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $x(t)$ zur Verfügung, wofür etwa auf LIONS [38] verwiesen sei. Schwieriger gestaltete sich die Ausarbeitung vergleichbarer Bedingungen für Aufgaben, in denen $x(t)$ nur einem System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung genügen muß. Solche Aufgaben werden im folgenden als *Dieudonné-Rashevsky-Probleme* bezeichnet. In den Arbeiten von CESARI [24] (1969), RUND [43] (1976) und KLÖTZLER [31] (1976) wurde zunächst versucht, das obenstehende Maximumprinzip formal unverändert auf diese Problemklasse zu übertragen (unter passenden analytischen Voraussetzungen). Dabei konnte die Gültigkeit der Maximumbedingung nur unter der Voraussetzung bewiesen werden, daß die zugehörige Hamilton-Jacobi-Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{\partial}{\partial t_{\mu}} S_{\mu}(t, \xi) + \max_{v \in V} H(t, \xi, v, \nabla_{\xi} S(t, \xi), \lambda_0) \leq 0, \quad S(t, \xi) \in C^{1,m}[\Omega \times \mathbb{R}^n],$$

in einer ganzen Umgebung eines Graphen $[t, \xi] = [t, \hat{x}(t)]$, für den Gleichheit gilt, eine Lösung S besitzt. Die zitierten Arbeiten behalten ihre Bedeutung durch die Benutzung von Argumenten aus der Dualitätstheorie; die vorgeschlagene Voraussetzung grenzt jedoch zu viele Aufgaben aus dem Gültigkeitsbereich des Satzes aus. Die Schwierigkeiten werden schon an dem folgenden einfachen Beispiel deutlich.¹⁾

Beispiel 0.1–2: Wir wollen untersuchen, ob zur Lösung der folgenden “mehrdimensionalen” Steuerungsaufgabe (**)

$$F(x, u) = \int_{\Omega} [u_{1,1}(t) u_{2,2}(t) - u_{1,2}(t) u_{2,1}(t)] dt \longrightarrow \inf !,$$

$$u_{1,1}(t) = D_{t_1} x_1(t), \quad u_{1,2}(t) = D_{t_2} x_1(t), \quad u_{2,1}(t) = D_{t_1} x_2(t), \quad u_{2,2}(t) = D_{t_2} x_2(t);$$

$$u(t) \in V \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ fast überall auf } \Omega$$

eine fast überall punktweise gültige Maximumbedingung benutzt werden kann. Wir präzisieren die analytischen Voraussetzungen und verlangen: $x \in W_{p,0}^{1,2}[\Omega]$ mit $2 < p < \infty$ (dann stimmt x fast überall mit einer stetigen Funktion überein, die auf dem Rand von Ω verschwindet), $u \in L^{p,4}[\Omega]$ und $y \in W_q^{1,4}[\Omega]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Normalgebiet. Über V setzen wir zunächst nur $o_4 \in V$ voraus. Das Zielfunktional verschwindet für alle Funktionen $x \in C_0^{\infty,2}[\Omega]$ und damit für alle zulässigen Elemente.²⁾

¹⁾ KLÖTZLER/PICKENHAIN [37], S. 23

²⁾ Nach MORREY [40], S. 70, Theorem 3.2.3., ist F ein lineares und stetiges Funktional auf $W_p^{1,2}[\Omega]$.

Daher ist z.B. $\hat{x}(t) \equiv \mathbf{o}_2$, $\hat{u}(t) \equiv \mathbf{o}_4$ eine Minimallösung von (**). Mit der Pontrjagin-Funktion

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = -\lambda_0 \left[v_{1,1} v_{2,2} - v_{1,2} v_{2,1} \right] + \eta_{1,1} v_{1,1} + \eta_{1,2} v_{1,2} + \eta_{2,1} v_{2,1} + \eta_{2,2} v_{2,2}$$

lautet die Maximumbedingung ($\mathcal{MP}$) für $[\hat{x}, \hat{u}] = [\mathbf{o}_2, \mathbf{o}_4]$ in der oben angegebenen Gestalt wie folgt: Für alle $u(t) \in V$ und fast alle $t \in \Omega$ gilt: $H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), y(t), \lambda_0) \geq H(t, \hat{x}(t), u(t), y(t), \lambda_0) \iff$

$$0 \geq -\lambda_0 \left[u_{1,1}(t) u_{2,2}(t) - u_{1,2}(t) u_{2,1}(t) \right] + y_{1,1}(t) u_{1,1}(t) + y_{1,2}(t) u_{1,2}(t) + y_{2,1}(t) u_{2,1}(t) + y_{2,2}(t) u_{2,2}(t).$$

Definieren wir nun den Steuerbereich durch $V := [-1, 1]^4 \subset \mathbb{R}^4$, so sind die Steuerungen $[u_{1,1}, 0, 0, 0]^T$ und $[-u_{1,1}, 0, 0, 0]^T$ beide zulässig. Setzen wir diese in ($\mathcal{MP}$) ein, dann erhalten wir für beliebige $\lambda_0 \geq 0$, $y \in W_q^{1,4}[\Omega]$ und für fast alle $t \in \Omega$:

$$0 \geq y_{1,1}(t) u_{1,1}(t) \quad \text{sowie} \quad 0 \geq -y_{1,1}(t) u_{1,1}(t).$$

Also muß $y_{1,1}$ fast überall auf Ω verschwinden. Für die anderen Komponenten von y schließt man analog, so daß folgt:

$$(\mathcal{MP}) \implies 0 \geq -\lambda_0 \left[u_{1,1}(t) u_{2,2}(t) - u_{1,2}(t) u_{2,1}(t) \right].$$

Das ist nur möglich, wenn im Widerspruch zur Aussage des Maximumprinzips gleichzeitig mit $y(t) \equiv \mathbf{o}_4$ auch λ_0 verschwindet. Man kann also für die Aufgabe (**) keine fast überall punktweise gültige Maximumbedingung aufstellen. Für $V = \mathbb{R}^4$ erhalten wir übrigens dasselbe Resultat. ■

Damit ist die Frage aufgeworfen, welche Gestalt die Maximumbedingung für mehrdimensionale Aufgaben überhaupt annehmen kann. In der Arbeit von KLÖTZLER [34] (1990) wurde vorgeschlagen, einen Korrekturterm zur Pontrjagin-Funktion zu addieren, die dann wie folgt lautet:

$$H'(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = -\lambda_0 \left[r(t, \xi, v) + c \cdot |v - \hat{u}(t)| \right] + \eta^T v,$$

worin $[\hat{x}, \hat{u}]$ eine Minimallösung der Aufgabe und $c > 0$ eine hinreichend große Konstante ist. Die mit Hilfe von H' formulierte Maximumbedingung ist aber nur mühsam zu handhaben.

Eine angemessene, jedoch auch überraschende Antwort auf unsere Frage wird durch den im darauffolgenden Jahr aufgefundenen Satz von KLÖTZLER/PICKENHAIN gegeben. Dieser Satz stellt den Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit dar.

Satz 0.1–3: (ε -Maximumprinzip) Wir betrachten die Steuerungsaufgabe (***)

$$F(x, u) = \int_{\Omega} r(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \inf !, \quad [x, u] \in W_{p,0}^1[\Omega] \times U;$$

$$\nabla x(t) = g(t, x(t), u(t))$$

für einen beschränkten, konvexen und abgeschlossenen Steuerbereich $U \subset L^{p,\nu}[\Omega]$. Zu (***) sei eine globale Minimalstelle $[\hat{x}, \hat{u}]$ gegeben. Die übrigen analytischen Voraussetzungen sind dann folgende: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein beschränktes Lipschitz-Gebiet s. str. mit $2 \leq m < p < \infty$. $r(t, \xi, v)$ sei in allen Argumenten stetig differenzierbar und in v konvex. Die Funktionen $r(t, x(t), u(t))$, $r(\hat{x}(t), u(t))$ und $r_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ seien für alle zulässigen Elemente $[x, u]$ bzw. für $[\hat{x}, \hat{u}]$ zusammen mit einem beliebigen $u \in U$ integrierbar. $g(t, \xi, v)$ sei als Funktion von t meßbar und beschränkt sowie linear in ξ und v . Es sei $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Dann existieren zu $[\hat{x}, \hat{u}]$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ Multiplikatoren $\lambda_0 > 0$ und $y_\varepsilon \in W_q^{1,m}[\Omega]$, die zusammen

mit der Pontrjagin-Funktion $H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = -\lambda_0 r(t, \xi, v) + \eta^T g(t, \xi, v)$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$(\mathcal{M})_\varepsilon: \quad \varepsilon + \int_{\Omega} \left(H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), y_\varepsilon(t), \lambda_0) - H(t, \hat{x}(t), u(t), y_\varepsilon(t), \lambda_0) \right) dt \geq 0 \quad \forall u \in U; \quad (1)$$

$$(\mathcal{K})_0^0: \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m D_{t_i} \varphi(t) y_{\varepsilon, i}(t) - H_\xi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), y_\varepsilon(t), \lambda_0) \cdot \varphi(t) \right) dt = 0 \quad \forall \varphi \in W_{p,0}^1[\Omega]. \quad (2)$$

■¹⁾

Dieser Satz lehrt, daß im Gegensatz zu eindimensionalen Aufgaben die Maximumbedingung für Dieudonné-Rashevsky-Probleme zunächst in integrierter Form aufgestellt werden muß. Außerdem hängen die Multiplikatoren von einem zusätzlichen Parameter $\varepsilon > 0$ ab. Man kann dann weiter die Folge von Multiplikatoren $\{[\lambda_{0,k}, y_{\varepsilon_k}]\}$ untersuchen, die zu einer Parameterfolge $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ gehört. Findet man darin eine schwach*-konvergente Teilfolge, so kann man sich wieder von dem Parameter ε befreien.²⁾ Diese Sätze wurden in KLÖTZLER/PICKENHAIN [37] auf den Fall erweitert, daß die Steuerungen u Elemente eines reflexiven Banachraumes sind.

Das hauptsächliche Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, den Satz 0.1–3 und die von KLÖTZLER entwickelte Beweistechnik auf Steuerbereiche zu übertragen, die von vornherein aus dem $L^\infty[\Omega]$ oder aus dem $\mathcal{D}'^\infty[\Omega]$ kommen.

Die Wahl des Raumes $L^\infty[\Omega]$ für die Steuerungen $u_i(\cdot)$ begründen wir wie folgt. Seien die zulässigen x Sobolevfunktionen mit stetigen Repräsentanten (also $x \in W_p^1[\Omega]$, $p > m$). Erlegt man dann den verallgemeinerten Ableitungen $D_{t_\mu} x$ die üblichen Steuerbeschränkungen der Gestalt $D_{t_\mu} x(t) \in V(t)$ für fast alle $t \in \Omega$ mit einer beschränkten Menge $\bigcup_{t \in \Omega} V(t) \subset \mathbb{R}^m$ auf, so müssen die $D_{t_\mu} x$ zum $L^\infty[\Omega]$ gehören, woraus $x \in W_\infty^1[\Omega]$ folgt. Der zulässige Bereich eines solchen mehrdimensionalen Steuerungsproblems liegt also in Wirklichkeit nicht im $W_p^1[\Omega] \times L^{p,m}[\Omega]$, sondern im $W_\infty^1[\Omega] \times L^{\infty,m}[\Omega]$. Die Multiplikatoren y sind dann lineare, stetige Funktionale auf dem Raum $L^{\infty,m}[\Omega]$. Auch dann, wenn die Menge $\bigcup_{t \in \Omega} V(t)$ nicht mehr beschränkt ist, erfordert die Elimination des Parameters ε die Untersuchung solcher Funktionale als Multiplikatoren. Der $L^{\infty,m}[\Omega]$ ist ein irreflexiver Raum, und seine abgeschlossene Einheitskugel ist nur noch schwach*-kompakt. Das bedeutet in den Beweisen den Übergang von der schwachen zur schwach*-Konvergenz. Da die Konvergenz in Distributionenräumen vom gleichen Typ ist, kann man erwarten, daß sich Aufgaben mit distributionellen Steuerungen $u \in \mathcal{D}'^{\infty,m}[\Omega]$ mit denselben Methoden behandeln lassen. Weil wir auch sonst gelegentlich mit Distributionen arbeiten wollen, stellen wir eine kurze Einleitung in ihre Theorie an den Beginn der Arbeit.

Die nächsten beiden Kapitel sind der genaueren Untersuchung der Multiplikatoren y und der auftretenden Differential- bzw. Integralgleichungen gewidmet. Zuerst müssen wir uns Klarheit über den Raum $[L^\infty]^*$ verschaffen, aus dem die Multiplikatoren y kommen. Dieser Raum ist bisher selten benutzt worden und daher wenig bekannt. Seine Elemente können als beschränkte, additive Mengenfunktionen aufgefaßt werden, die auf Lebesgueschen Nullmengen verschwinden. Die tatsächliche Qualität auch der Multiplikatoren y_ε als Mengenfunktionen bleibt verdeckt, solange die Aufgaben in die Räume $W_p^1[\Omega] \times L^{p,m}[\Omega]$, $p < \infty$, eingebettet werden. Auch deshalb wollen wir von vornherein mit Steuerungen $u \in L^\infty[\Omega]$ arbeiten. Bei den Mengenfunktionen y handelt es sich um Inhalte, die im allgemeinen keine Maße sind. Sie lassen sich in eindeutiger Weise in einen absolutstetigen und einen sog. rein endlich additiven Anteil zerlegen. Dessen Struktur wird in Kapitel 2.3. durch einige neu aufgestellte Sätze vollständig aufgeklärt, und wir erhalten eine brauchbare analytische Darstellung für die Multiplikatoren y .

¹⁾ KLÖTZLER [35], S. 326 f.

²⁾ Ebenda, Theorem 4, S. 330

Anschließend untersuchen wir in Kapitel 3 die Integrabilitätsbedingungen für die partiellen DGL.en in den Aufgaben. Seien für alle $t \in \Omega$ Mengen $V(t) \neq \emptyset$ so gegeben, daß $\bigcup_{t \in \Omega} V(t)$ eine beschränkte Menge ist. Beschreibt man nun den Steuerbereich durch die Bedingung

$$u \in U \subset L^{\infty, m}[\Omega] \iff \text{für fast alle } t \in \Omega \text{ gilt } u(t) \in V(t) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

so enthält U als zulässige Steuerungen auch solche u , die die Integrabilitätsbedingungen für das pDGL.-System verletzen. Ihnen kann deshalb kein zulässiges Element $[x, u]$ zugeordnet werden. Es ist hauptsächlich diese Tatsache, welche die Schwierigkeiten bei der Behandlung von Dieudonné-Rashevsky-Problemen hervorruft. Wir müssen daher untersuchen, wie die Integrabilitätsbedingungen für gestörte pDGL.-Systeme

$$\frac{\partial x}{\partial t_\mu}(t) = a_\mu(t) x(t) + u_\mu(t), \quad \mu = 1, \dots, m$$

mit Störungen $u \in U$ aussehen. Dabei ergibt sich, daß die Integrabilitätsbedingungen in separate Anteile für a_μ und die Störungen u zerfallen. Wir diskutieren die Fälle gewöhnlicher, verallgemeinerter und distributioneller Ableitungen. Es schließen sich einige Betrachtungen über die Existenz von Lösungen für die kanonische Gleichung (2) an.

Im vierten Kapitel werden dann die angekündigten Sätze für “mehrdimensionale” Steuerungsaufgaben mit $[x, u] \in W_\infty^1[\Omega] \times L^{\infty, m}[\Omega]$ formuliert. Ich habe die Aussagen werden in drei Hauptsätzen zusammengefaßt. Im ersten Hauptsatz wird die Maximumbedingung in integrierter Form zusammen mit dem Parameter $\varepsilon > 0$ aufgestellt. Der zweite Hauptsatz gibt an, unter welchen Bedingungen $\varepsilon = 0$ verwendet werden darf. Die Beweise folgen dem in den Arbeiten von KLÖTZLER vorgezeichneten Grundmuster, das in allen Fällen gleich ist. Von Fall zu Fall müssen jedoch nicht unbedeutende Modifikationen angebracht werden. Bei der Darstellung waren Wiederholungen zu vermeiden, ohne daß die Besonderheiten der jeweils vorliegenden Situation übergangen werden sollten. Ich habe mich dafür entschieden, zwei voneinander abweichende Beweise zum ersten Hauptsatz und den Beweis zum zweiten Hauptsatz vollständig durchzuführen. Der dritte Hauptsatz konstatiert die punktweise Gültigkeit der Maximumbedingung auf Ω mit Ausnahme einer Teilmenge positiven, aber beliebig kleinen Maßes. Dabei wird die YOSIDA-HEWITT-Zerlegung für beschränkte, additive Mengenfunktionen zusammen mit den in Kapitel 2 aufgefundenen Eigenschaften der Multiplikatoren $y \in [L^\infty]^*$ benutzt. In Kapitel 5 wird die Anwendung der Sätze anhand von Aufgaben aus der Transportoptimierung veranschaulicht. Es entspricht der Anlage dieser Arbeit, daß hier Paare dualer Aufgaben betrachtet werden, nachdem schon zuvor die Beweise der Hauptsätze mit Argumenten der Dualitätstheorie geführt wurden.

Das sechste Kapitel enthält den ersten und zweiten Hauptsatz in der Formulierung für distributionelle Aufgaben. Die vorliegende Arbeit ist ursprünglich durch die Frage nach distributionellen Verallgemeinerungen des mehrdimensionalen Pontrjaginschen Maximumprinzips angeregt worden. Nach den Untersuchungen, die zu den Ergebnissen in Kapitel 4 geführt haben, erscheinen die Hauptsätze im distributionellen Fall eher als deren Korollare. Sie sollen nun an den Schluß der Arbeit gestellt werden. Wie angekündigt, lassen sich diese Sätze mit derselben Technik beweisen, die schon in Kapitel 4 eingesetzt wurde. Der dritte Hauptsatz hat jedoch kein distributionelles Gegenstück.