Einleitung

Computer Vision ist ein Teilbereich der Informatik, der die computergestützte Umsetzung von Aufgabenstellungen behandelt, die sich an Fähigkeiten des menschlichen visuellen Systems orientieren. Systeme, die „maschinell sehen“ können, werden derzeit in vielen industriellen und wirtschaftlichen Prozessen eingesetzt. Neben den Bereichen Produktautomatisierung und Qualitätssicherung finden sich wichtige Einsatzgebiete auch in der Verkehrs- oder Sicherheitstechnik. Man denke dabei z.B. an Mautsysteme oder die Überwachung öffentlicher Plätze. Es geht im Bereich *Computer Vision* oftmals darum, Objekte zu erkennen, Merkmale zu extrahieren, Objekte zu klassifizieren und daraus Aussagen abzuleiten. Häufig verwendet man dabei Verfahren aus der Bildverarbeitung und bedient sich der Mathematik als abstraktes Modellierungswerkzeug und zur grundlegenden, analytischen Rechtfertigung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Berechnung des optischen Flusses einer Sequenz von Bildern. Es handelt sich um eine Bildverarbeitungsaufgabe, die wir sowohl aus Sicht der Mathematik als auch aus Sicht der Informatik studieren werden. Der optische Fluss ist im Wesentlichen die sichtbare Bewegung, die wir mit unseren Augen wahrnehmen können. Anhand von Unterschieden in den Intensitäten bei einer Sequenz gegebener Bilder sind wir in der Lage, auf eine Schätzung des optischen Flusses zu schließen.
Zur kontinuierlichen Modellierung von Aufgaben in der Bildverarbeitung werden häufig mehrdimensionale Variationsmethoden mit partiellen Ableitungen eingesetzt. Diese Verfahren gehören zur Variationsrechnung und beruhen auf der Idee, dass Funktionale in Integraldarstellung minimiert werden. Zur Modellierung spezifiziert man außerdem Funktionenräume für Beobachtungen und gewünschte Ergebnisse. Bei der Berechnung des optischen Flusses haben neben stochastischen Ansätzen besonders Variationsmethoden in den letzten Jahren Fortschritte in Bezug auf Qualität der Ergebnisse und Geschwindigkeit der Algorithmen verbuchen können.[1] Daher bilden die Variationsmethoden eine gute Grundlage und Referenz für viele Verfahren, die wir in dieser Arbeit studieren werden.
Wissenschaftliche Modelle in den Naturwissenschaften Physik, Chemie oder Biologie, aber auch in der Informatik, lassen sich häufig mit partiellen Differentialgleichungen, d.h.

[1] [Bruhn/Weickert/Kohlberger/Schnörr 06], [Papenberg/Bruhn/Brox/Didas/Weickert 06], [Bruhn/Weickert/Schnörr 05], [Bruhn/Weickert/Feddern/Kohlberger/Schnörr 03], [Weickert/Bruhn/Papenberg/Brox 04], [Bruhn/Weickert/Schnörr 02]

Gleichungen, die eine Funktion und ihre partiellen Ableitungen enthalten, beschreiben. Interessant ist die Frage, ob man mehrdimensionale Variationsmethoden in der Bildverarbeitung um partielle Differentialgleichungs-Restriktionen sinnvoll erweitern kann. Speziell bei unserer Bildverarbeitungsaufgabe, der Berechnung des optischen Flusses, kann man die Ableitung des optischen Flusses als eine Steuergröße auffassen und das System durch Nebenbedingungen beeinflussen. Man spricht dann von sogenannten mehrdimensionalen Steuerungsproblemen. Diesen Problemtyp, genauer Probleme vom Typ Dieudonné-Rashevsky, hat WAGNER[2] aufgegriffen und für wichtige Aufgaben der Bildverarbeitung, insbesondere für die Berechnung des optischen Flusses, ein mathematisches Fundament in Form notwendiger Optimalitätsbedingungen gelegt. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit besteht darin, Variationsmethoden zur Berechnung des optischen Flusses, für die stabile numerische Verfahren bekannt sind, um Restriktionen auf mehrdimensionale Steuerungsprobleme zu erweitern und diese numerisch zu lösen. DEWESS und HELBIG haben in einer Arbeit zur Optimierung von Verkehrsflüssen[3] ein mehrdimensionales Steuerungsproblem aufgestellt und die zugehörige duale Aufgabe (ein stetiges Transportproblem) diskretisiert und numerisch gelöst. In dieser Arbeit werden wir mehrdimensionale Steuerungsprobleme unmittelbar numerisch behandeln.
Arbeiten der letzten Jahre zeigen vielfach das Bestreben nach einer präzisen Berechnung des optischen Flusses, insbesondere an Überdeckungs- bzw. Bewegungsgrenzen. Gerade auch im Hinblick auf Anwendungen im Bereich *Computer Vision* ist es interessant, solche Übergänge, also Unstetigkeitsstellen des optischen Flusses, als Kanten zu detektieren. Für Anwendungen versprechen wir uns davon eine hilfreiche Informationsquelle zur Merkmalsextraktion und Klassifikation von Objekten in Videos. Daher ist ein zweites Ziel, das wir in dieser Arbeit verfolgen, bei der Berechnung des optischen Flusses eine simultane Kantenerkennung durchzuführen. Variationsmethoden zur Segmentierung mit Level-Set-Methoden wurden aktuell z.B. von BROX et al.[4] bzw. PARAGIOS und DERICHE[4] untersucht. Wir werden in dieser Arbeit vom wohl bekanntesten Modell zur Segmentierung von Bildern, dem Ansatz von MUMFORD und SHAH[5], ausgehen. Inspiriert durch Approximationen des Mumford-Shah-Funktionals nach AMBROSIO[6] und TORTORELLI sowie einer Arbeit von BOURDIN[6] werden wir eine Variationsmethode zur simultanen Kantenerkennung bei der Berechnung des optischen Flusses aufstellen und numerisch lösen. Interessanterweise können wir die Idee der Kantenerkennung auch mit mehrdimensionalen Steuerungsproblemen kombinieren. Wir zeigen, dass es möglich ist, über Restriktionen auf einfache Art und Weise eine simultane Kantenerkennung durchzuführen, und dass diese leicht individuell angepasst werden kann.

[2] [WAGNER 07]
[3] [DEWESS/HELBIG 95]
[4] [BROX/BRUHN/WEICKERT 06], [PARAGIOS/DERICHE 05]
[5] [MUMFORD/SHAH 85], [MUMFORD/SHAH 88]
[6] [AMBROSIO/TORTORELLI 90], [AMBROSIO/TORTORELLI 92], [BOURDIN 99]

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In *Kapitel 1* führen wir das Konzept des optischen Flusses als Bildverarbeitungsaufgabe im Bereich *Computer Vision* ein und stellen grundsätzliche Umstände und Herausforderungen dar, die für die Praxis zu berücksichtigen sind. In *Kapitel 2* leiten wir die Struktur von Variationsmethoden zur Berechnung des optischen Flusses grundlegend her und stellen ein System an bekannten Daten- und Regularisierungstermen, aus Sicht der Informatik, in einem abstrakten mathematischen Rahmen vor. Um Variationsmethoden im Kontext der mathematischen Bildverarbeitung einzuordnen, führen wir andere Ansätze, wie z.B. wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze, kurz ein und gehen zu Beginn von *Kapitel 3* zudem auf einen Zusammenhang zu unterschiedlichen Bildmodellen ein. Mathematische Grundlagen für Variationsmethoden stehen in diesem Kapitel im Vordergrund. Wir stellen wichtige Funktionenräume, wie Sobolew-Räume und den Raum von Funktionen beschränkter Totalvariation mit TV-Norm, vor. Im Hinblick auf eine simultane Kantenerkennung interessieren wir uns für die Auswirkung der TV-Norm in Bezug auf Schärfe und Geschlossenheit berechneter Kantenbilder. Zudem wollen wir in dieser Arbeit den Zusammenhang zwischen Variationsmethoden und partiellen Differentialgleichungen nicht außer Acht lassen. In *Kapitel 4* präsentieren wir die notwendigen Optimalitätsbedingungen für einfache Variationsmethoden, die Euler-Lagrange-Gleichungen, und das Pontrjaginsche Maximumprinzip nach WAGNER[7] für mehrdimensionale Steuerungsprobleme. Sie bilden eine mathematische Grundlage und Rechtfertigung für den zweiten Teil der Arbeit, indem die numerische Behandlung im Vordergrund steht.
Um unsere Ergebnisse in einer Reihe von Experimenten geeignet illustrieren, analysieren und auswerten zu können, führen wir in *Kapitel 5* Darstellungsformen und Gütekriterien für den berechneten optischen Fluss und generierte Kantenbilder ein. Zur numerischen Behandlung werden wir in dieser Arbeit zwei grundsätzlich unterschiedliche Ansätze verfolgen. Zum einen verwenden wir in *Kapitel 6* die in der Informatik weit verbreitete Lösungsstrategie „Optimierung und anschließende Diskretisierung“. Dabei werden Variationsmethoden zunächst ausgehend von Euler-Lagrange-Gleichungen optimiert und dann in diskretisierter Form iterativ gelöst. Diese Verfahren werden wir mit der Software MATLAB implementieren. Zum anderen behandeln wir in *Kapitel 7* mehrdimensionale Steuerungsprobleme nach dem (direkten) Prinzip der „Diskretisierung und anschließenden Optimierung“. Die Idee beruht darauf, alle vorkommenden Integrale und Differentialgleichungen passend zu diskretisieren und das resultierende nichtlineare Optimierungsproblem, das eine großen Anzahl an Optimierungsvariablen enthält, zu lösen. Dieser Ansatz wurde bereits von MAURER/MITTELMANN[8] bei elliptischen Steuerungsproblemen und von THEISSEN[9] bei mehrdimensionalen Steuerungsproblemen erfolgreich

[7] [WAGNER 07]
[8] [MAURER/MITTELMANN 00], [MAURER/MITTELMANN 01]
[9] [THEISSEN 06]

eingesetzt. Da die numerische Behandlung solcher Systeme extrem schwierig ist, greifen wir auf den *large-scale* Optimierungssolver IPOPT von LAIRD/WÄCHTER[10], der auf Innere-Punkte-Verfahren beruht, zurück. Bekannte Variationsmethoden sowie die oben angesprochene Variationsmethode zur simultanen Kantenerkennung werden wir zum Vergleich mit beiden Ansätzen behandeln. In *Kapitel 7* studieren wir in einer Reihe von Experimenten den Einfluss von Restriktionen auf den optischen Fluss, eine simultane Kantenerkennung über Restriktionen sowie Auswirkungen einer TV-Regularisierung auf den optischen Fluss und eine Kantenerkennung. Zum Ende der Arbeit, in *Kapitel 8* und *9*, diskutieren wir die Ergebnisse unserer numerischen Experimente, fassen die Arbeit zusammen und geben einen Ausblick auf Erweiterungen und weitere Anwendungsgebiete der Konzepte dieser Arbeit. Im Anhang sind Hinweise auf Referenzmaterialien und beispielhaft Quellcode zu beiden numerischen Lösungsstrategien zu finden.

[10][LAIRD/WÄCHTER], [WÄCHTER/BIEGLER 06]