0 Einleitung

Die Digitalisierung von Daten ist heutzutage von fundamentaler Bedeutung für Wissenschaft und Wirtschaft. Der große Fortschritt auf den Gebieten der Informationsverarbeitungssysteme sowie der modernen Mathematik stellt einen weiteren wichtigen Faktor für die Entstehung des jungen Forschungsgebiets namens digitaler Bildverarbeitung (*engl.: Image processing*) dar. Die Bildverarbeitung, deren Eingabe digitale Bilder sind, beschäftigt sich unter anderem mit Verfahren zur Extraktion relevanter Informationen. Es gibt viele Probleme, die die Forschung in diesem Bereich anregen - Entrauschung, Entzerrung, Segmentierung, Registrierung, Restauration etc. Es hat sich gezeigt, dass die Mathematik eine angenehme, abstrakte Umgebung für die Behandlung dieser Probleme darstellt. Allerdings ist dieses oft mit einem enormen mathematischen Aufwand verbunden und erfordert eine solide Sammlung von mathematischen Werkzeugen.[1] Für einen einführenden Überblick bezüglich der Probleme, Ansätze und Modelle verweisen wir hier auf [Burger 2007b], [Burger 2010] .

Die entwickelten Verfahren auf dem betreffenden Gebiet haben zahlreiche Anwendungen. Die Bildsegmentierung hat beispielsweise das Aufteilen eines Bildes in einzelne Bereiche anhand eines Kriteriums als Aufgabenstellung. Ein solches Kriterium können zum Beispiel die Bildkanten darstellen. Bildkanten werden oft als Unstetigkeitsstellen der kontinuierlichen Bildfunktion und im diskreten Bildmodell als abrupte Änderung des Farbwerts definiert. Neben der Fernerkundung und Kartographie wird die Segmentierung zur Qualitätskontrolle beim Herstellungsablauf verschiedener Produkte eingesetzt. Ein sehr wichtiges Anwendungsgebiet ist auch die Medizin. Mit Hilfe von Segmentierungsmethoden lassen sich verschiedene Bildobjekte voneinander abgrenzen, wie zum Beispiel Gewebearten, Tumore und Organe, was später relevante Informationen für Diagnostik und Therapie liefert.[2] Einige interessante Ansätze zum Segmentierungsproblem findet man in [Aubert und Kornprobst 2006].

Von zunehmendem Interesse in der medizinischen Bildverarbeitung ist heutzutage auch das Bildregistrierungsproblem. *Unter Bildregistrierung versteht man einen Prozess der Bestimmung einer geeigneten Transformation, die die räumliche Übereinstimmung zweier Bilder wiederherstellt.* Dabei macht diese Definition Sinn, wenn in den Bildern struk-

[1] vgl. [Epstein 2007], [Aubert und Kornprobst 2006], [Scherzer et al. 2009]
[2] vgl. Kapitel 5, [Handels 2009]

turelle Gemeinsamkeiten vorliegen. Im Falle von Bilddaten $I_0(s)$, $I_1(s)$, die Produkte des selben Bildgebungsverfahrens sind[3], geht man davon aus, dass die zueinander korrespondierenden Bildstrukturen in I_0 und I_1 geringe Abweichungen der Intensitätswerte aufweisen. In diesem Fall kann die Aufgabenstellung des Registrierungsproblems wie folgt formuliert werden:

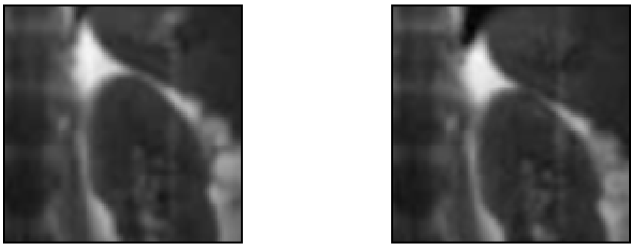

Abbildung 0.1: zeitverschiedene MRT-Aufnahmen einer Nierenregion (unimodales Bildpaar)

Gesucht ist eine Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *so dass*

$$I_1(\psi(s)) \approx I_0(s).$$

Liegen Bilddaten vor, bei denen zueinander korrespondierende Bildmerkmale mit stark abweichenden Intensitätswerten abgebildet sind[4], so ist eine adäquate Reformulierung des Problems notwendig.

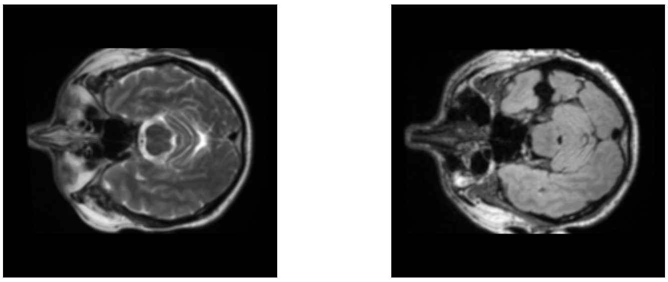

Abbildung 0.2: sequenzverschiedene MRT-Aufnahmen eines menschlichen Kopfes

Der vielleicht bekannteste mathematische Lösungsansatz für das Bildregistrierungsproblem, als auch für viele anderen Probleme der Bildverarbeitung ist der *Variationsansatz.*

[3]Ein solches Bildpaar nennt man auch *unimodal.*
[4]Dies ist oft der Fall bei *multimodalen* Bilddaten.

Bei diesem Ansatz werden geeignete *Variationsfunktionale* definiert, deren Minimallösungen als Lösungen des ursprünglich modellierten Problems betrachtet werden. Einige variationelle Formulierungen des Bildregistrierungsproblems findet man in [Modersitzki 2004]. Dort findet man ein Variationsproblem, welches die elastische Bildregistrierung behandelt. Dieses Problem ist auch in dieser Arbeit von Interesse. Die Arbeiten von WAGNER[5] ermöglichen einigen Variationsaufgaben in der Bildverarbeitung die Reformulierung als mehrdimensionale Steuerungsprobleme vom Dieudonné-Rashevsky-Typ. [6] Probleme von diesem Typ kommen zum Vorschein, wenn einer gewöhnlichen Variationsaufgabe geeignete partielle Differenzialgleichungs-Restriktionen hinzugefügt werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die multimodale Bildregistrierung durch in [Franek et al. 2010] und [Wagner 2010b] diskutierten Steuerungsmethoden vom Dieudonné-Rashevsky-Typ zu beleuchten, sowie die Definition und die numerische Behandlung eines neuen Steuerungsproblems zur multimodalen Bildregistrierung zu entwickeln. Setzt man das Steuerungsproblem aus [Franek et al. 2010] für die Kantenerkennung ein, so können wir die Kantenbilder unimodal und elastisch durch das Steuerungsproblem aus [Wagner 2010b] registrieren. Die neue Steuerungsmethode, die wir betrachten, soll schließlich die zwei Probleme der Kantenerkennung und das Problem der Registrierung simultan lösen. In Kapitel 1 werden die Definitionen der Funktionenräume sowie einige Grundeigenschaften dieser Räume dargelegt. Dort werden auch wichtige Ergebnisse der Variationsrechnung und der Theorie der Steuerungsprobleme vom Dieudonné-Rashevsky-Typ angegeben.[7] Im 2. Kapitel soll dann das Bildregistrierungsproblem etwas genauer diskutiert werden. Dabei werden die bekanntesten Vergleichsmaße für Bilder als auch zwei weitere interessante Variationsprobleme zur elastischen Bildregistrierung einer Betrachtung unterzogen. Kapitel 3 widmet sich den bekannten Steuerungsproblemen zur unimodalen Registrierung und Entrauschung sowie schließlich der Darlegung der neuen Steuerungsmethode zur multimodalen Registrierung. Da für die Optimierungsstrategie in dieser Arbeit *„erst diskretisieren, dann optimieren“* gilt, wird daher in Kapitel 5 unter anderem auf die Diskretisierung der Probleme eingegangen. Die Konfiguration AMPL/IPOPT wird zur numerischen Lösung der Steuerungsprobleme benutzt. IPOPT ist ein Softwarepaket zur Lösung von linearen und nichtlinearen Optimierungsproblemen, das eine Innere-Punkte-Methode implementiert. Die Idee hinter diesen Methoden werden wir in Kapitel 4 kurz anhand der linearen Optimierung erklären. Anschließend schauen wir uns die Optimierungsroutinen von IPOPT an. Nachdem wir in Kapitel 5 die Qualitätsindikatoren präsentiert haben, wenden wir uns in Kapitel 6 der numerischen Ergebnisse zu, die dort auch ausführlich diskutiert werden.

[5] [Wagner 2006] , [Wagner 2009]

[6] vgl. [Brune 2007], [Franek 2007a], [Franek 2007b]

[7] Weitere Theorie über Steuerungsprobleme kann in [Tröltzsch 2009] nachgelesen werden.