

Arbeitsblatt: Lineare Unabhängigkeit — Rang

1. "Vokabeln":

- Eine Menge von Zeilen- oder Spaltenvektoren heißt *linear unabhängig*, wenn ...
- Eine Menge von Zeilen- oder Spaltenvektoren heißt *linear abhängig*, wenn ...
- Eine (m, n) -Matrix $\mathbf{A}$ hat den *Rang* r , wenn ...
- Eine (m, n) -Matrix $\mathbf{A}$ hat *vollen Zeilenrang (Spaltenrang)*, wenn ...
- Eine quadratische Matrix heißt *regulär*, wenn ...
- Eine quadratische Matrix heißt *singulär*, wenn ...

2. Zeilenrang gleich Spaltenrang

Satz : Eine (m, n) -Matrix $\mathbf{A}$ hat genau dann den Rang r , wenn sie eine reguläre (r, r) -Untermatrix besitzt, während jede $(r + 1, r + 1)$ -Untermatrix singulär ist.

3. Rangungleichungen

1. $\text{Rang } \mathbf{A} \leq \text{Minimum (Zeilenzahl, Spaltenzahl)}$
2. $\text{Rang}(\mathbf{A}^T) = \text{Rang } \mathbf{A}$.
3. Für $\mathbf{A}$ und einen Linksfaktor $\mathbf{P}$ gilt: $\text{Rang}(\mathbf{P} \mathbf{A}) \leq \text{Rang } \mathbf{A}$.
4. Für $\mathbf{A}$ und einen Rechtsfaktor $\mathbf{Q}$ gilt: $\text{Rang}(\mathbf{A} \mathbf{Q}) \leq \text{Rang } \mathbf{A}$.
5. Für einen Linksfaktor $\mathbf{P}$ mit vollem Spaltenrang gilt: $\text{Rang}(\mathbf{P} \mathbf{A}) = \text{Rang } \mathbf{A}$.
6. Für einen Rechtsfaktor $\mathbf{Q}$ mit vollem Zeilenrang gilt: $\text{Rang}(\mathbf{A} \mathbf{Q}) = \text{Rang } \mathbf{A}$.
7. Sind $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ reguläre Matrizen, so gilt: $\text{Rang}(\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}) = \text{Rang } \mathbf{A}$.
8. Bildet man aus einer Matrix $\mathbf{A}$ eine neue Matrix durch
 - Vertauschen von Zeilen,
 - Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$,
 - Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,so bleiben Typ und Rang unverändert.